ESPACIOS DE HARDY DISCRETOS Y ACOTACION DE OPERADORES.

Memoria presentada por

Santiago Boza Rocho

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Directora:

María Jesús Carro Rossell.

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona, Julio 1998.

Dedico este trabajo
a la memoria de Encarnación Rocho,
a Carmen, quien ha estado muy cerca,
en especial en los momentos finales,
y al resto de mi familia por su cariño y comprensión.

Índice General

Introducción **1**

1 Resultados sobre funciones de tipo exponencial **9**

2 Caracterizaciones de los espacios de Hardy discretos **19**

2.1 Caracterización en términos de la transformada discreta de Hilbert . . 21

2.2 Caracterización maximal asociada al núcleo de Poisson discreto 27

2.3 Otras caracterizaciones maximales de $H^p(\mathbb{Z})$. Caracterizaciones en términos de funciones de área 32

2.4 Descomposición atómica de los espacios $H^p(\mathbb{Z})$ 41

2.5 Una caracterización grand-maximal de $H^p(\mathbb{Z})$ 59

3 Relaciones entre los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ y $H^p(\mathbb{Z}^N)$ **63**

3.1 Resultados de muestreo para funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ de tipo exponencial 64

3.2 Construcción de funciones de tipo exponencial en $H^p(\mathbb{R}^N)$ a partir de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ 69

3.3 Aplicación: Transformadas de Fourier de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ 75

4 Discretización de operadores definidos sobre $H^p(\mathbb{R}^N)$ **79**

4.1 Acotación de las versiones discretas obtenidas de las correspondientes continuas 82

4.2 Acotación de las versiones continuas a partir de las correspondientes discretas 85

4.3 Discretización de operadores integrales 92

4.4 Aplicaciones 96

5 Espacios de Hardy discretos en dimensión superior **99**
5.1 Caracterización en términos de las transformadas de Riesz discretas . . 100
5.2 Otras caracterizaciones maximales y en términos de funciones de área . 108
5.3 Caracterización atómica de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ 113

A Dualidad $H^1(\mathbb{Z})$–$BMO(\mathbb{Z})$ **127**

Bibliografía **137**

Introducción

En [CW2], Coifman y Weiss extienden la definición usual de espacios de Hardy $H^p(\mathbb{R}^N)$ ([FS]) al contexto más general de espacios de tipo homogéneo. Sus resultados están basados en la caracterización atómica de estos espacios. Desde entonces, la teoría ha sido ampliamente desarrollada por diferentes autores. En este sentido, debemos mencionar el trabajo de Macías y Segovia [MS], en el que prueban una caracterización equivalente de los espacios de Hardy mediante una función grand maximal.

Un caso particular de espacio de tipo homogéneo es el conjunto $\mathbb{Z}^N$, con lo cual, los dos trabajos mencionados anteriormente nos proporcionarían dos definiciones equivalentes de los espacios $H^p(\mathbb{Z}^N)$. Debemos mencionar otros trabajos relacionados con esta teoría, por ejemplo [U], que proporciona una caracterización maximal de los espacios de Hardy en espacios de tipo homogéneo, y [H] donde el autor obtiene una descomposición atómica para espacios de Triebel-Lizorkin sobre espacios de tipo homogéneo, de los cuales los espacios de Hardy constituyen un caso particular. Sin embargo, en estos dos trabajos las hipótesis impuestas sobre el espacio de medida excluyen el caso de puntos de medida positiva y por tanto $\mathbb{Z}^N$.

Desde un punto de vista diferente, Q. Sun en [Su1] da una caracterización de $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de funciones de área discreta, si bien su trabajo deja abierta la conexión con las caracterizaciones clásicas antes mencionadas.

El objetivo primordial de esta memoria es presentar las diversas caracterizaciones equivalentes de los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}^N$ y relacionarlas con los trabajos existentes en este sentido mencionados con anterioridad.

Fijamos a continuación las notaciones generales que aparecerán en esta memoria, si bien, en general irán introduciéndose a lo largo de su desarrollo:

- $\mathcal{S}$= funciones de la clase de Schwartz.
- $\mathcal{S}'$= espacio de distribuciones temperadas, dual de $\mathcal{S}$.
- Para una función f con dominio en Ω, sop f= soporte de f= clausura del subconjunto de Ω donde $f \neq 0$.
- $C^k(\Omega)$ = espacio de funciones con derivadas contínuas de orden $\leq k$ en Ω.
- $C_0^k(\mathbb{R}^N)$ = espacio de funciones de clase C^k nulas en infinito.
- Si F es una función continua en $\mathbb{R}^N$, F^d representará a la sucesión formada por la restricción de F a $\mathbb{Z}^N$, excepto que se indique lo contrario.
- Para $t > 0$ y $\Phi \in C(\mathbb{R}^N)$, notaremos por $\Phi_t(\cdot) = 1/t^N \Phi(\cdot/t)$, salvo indicación explícita de lo contrario.
- Para $0 < p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^N)$ y $l^p(\mathbb{Z}^N)$, denotan a los espacios de Lebesgue habituales en $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{Z}^N$ respectivamente.
- Representaremos por $\hat{f}$ y $(f)^\vee$ a la transformada y cotransformada de Fourier respectivamente de una función f. En el caso en que $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, éstas vienen definidas por las integrales

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\ e^{-2\pi i x\cdot\xi}\ dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

$$(f)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)\ e^{2\pi i x\cdot\xi}\ dx, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

- Dadas dos expresiones x e y, $x \sim y$ indicará que existe una constante positiva C tal que $C^{-1}x \leq y \leq Cx$, donde C representa una constante universal que puede variar durante el desarrollo de una fórmula. Si X e Y son dos espacios de funciones dotados de las normas o quasinormas $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, respectivamente, la notación $X \sim Y$, indicará que $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ son comparables.
- Introducimos, a continuación, la notación de multiíndices debida a L. Schwartz que nos será de utilidad, especialmente, en los Capítulos 3 y 5 en los que la teoría se desarrolla en varias variables.

Los vectores $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ cuyas componentes son enteros no negativos α_k, los denominaremos multiíndices.

Para $\alpha \in \mathbb{Z}^N$, definimos los escalares

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_N; \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_N!,$$

y para $x \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{Z}^N$ el monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$.

En $\mathbb{Z}^N$ definimos un orden parcial escribiendo

$$\alpha \geq \beta \ \text{ siempre que } \ \alpha_i \geq \beta_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

En la fórmula del binomio utilizaremos esta notación, para α multiíndice,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta \, y^{\alpha-\beta}, \quad \text{donde} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

El operador derivada parcial respecto al multiíndice α vendrá representado mediante D^α, o bien, $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$.

Las diferentes definiciones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ a introducir resultarán ser las obtenidas al discretizar de manera natural las diversas caracterizaciones equivalentes de los espacios de Hardy clásicos $H^p(\mathbb{R}^N)$, para $0 < p \leq 1$. Estas son:

- **Caracterizaciones maximales** ([FS]): Una distribución $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ si para $\Phi \in \mathcal{S}$ con $\displaystyle\int \Phi = 1$, la función maximal

$$\sup_{t>0} |(\Phi_t * f)(x)| \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

  El papel de la función $\Phi \in \mathcal{S}$, puede ser substituido por el del núcleo de Poisson,

$$P_t(x) = C_N \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(N+1)/2}}, \quad t > 0,$$

  donde $C_N = \dfrac{\Gamma((N+1)/2)}{\pi^{(N+1)/2}}$. En este caso,

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim \| \sup_{t>0} |P_t * f| \|_p \sim \| \sup_{t>0} |\Phi_t * f| \|_p.$$

- **En términos de transformadas de Riesz** ([Mi]): Las funciones de $L^2(\mathbb{R}^N)$ pertenecientes a los espacios de Hardy pueden caracterizarse mediante operadores integrales singulares. El ejemplo más básico al respecto lo constituyen los operadores transformadas de Riesz R_j, $j = 1 \cdots N$. Estos vienen dados por (ver [St1])
$$R_j(f) = f * K_j, \text{ donde } \hat{K}_j(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}, \; K_j(x) = C_N \frac{x_j}{|x|^{N+1}};$$
donde C_N es la constante aparecida anteriormente en la definición del núcleo de Poisson. Notamos que en el caso de dimensión $N = 1$, $R_1 = H$ es la transformada de Hilbert que viene dada por convolución con $K(x) = \frac{1}{x}$, y, en consecuencia, $\hat{K}(\xi) = -\pi i \operatorname{sign}(\xi)$.

  La caracterización es la siguiente: si $p > (N-1)/N$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap H^p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si $R_j f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq j \leq N$. Además
$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim \|f\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|R_j f\|_p.$$

- **En términos de funciones de área** ([FJW]): La teoría de Littlewood-Paley puede aplicarse a la descripción de $H^p(\mathbb{R}^N)$ en términos de funciones de área. En concreto, si $\Phi \in \mathcal{S}$ es tal que $\int \Phi = 0$, tenemos que, si $0 < p \leq 1$,
$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_0^\infty |\Phi_t * f|^2(x) \;\; \frac{dt}{t} \right]^{p/2} \; dx \right\}^{1/p}.$$
  O bien, si suponemos además que sop $\hat{\Phi} \subseteq \{\xi; 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ y que $|\hat{\Phi}(\xi)| \geq C > 0$ si $3/5 \leq |\xi| \leq 5/3$, podemos dar la siguiente caracterización en términos de funciones de área discreta
$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\Phi_{2^m} * f|^2(x) \right]^{p/2} \; dx \right\}^{1/p}.$$

- **Descomposición atómica de** $H^p(\mathbb{R}^N)$ ([Cf], [L], [W]): Una distribución $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si existe una sucesión numérica $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ y una colección de $p-$átomos tales que
$$f = \sum_k \lambda_k a_k,$$

donde la serie anterior converge en H^p y, por tanto, en el sentido de las distribuciones y $\sum |\lambda_k|^p < \infty$. Además,

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim \inf \left(\sum |\lambda_k|^p\right)^{1/p},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones $f = \sum_k \lambda_k \, a_k$, de la forma anterior.

A lo largo de la memoria presentaremos la equivalencia de diferentes caracterizaciones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$. Dichas caracterizaciones se presentan con el mismo esquema que el dado para el caso $\mathbb{R}^N$. Las técnicas utilizadas en la demostración de dichas equivalencias utilizan fuertemente los resultados de muestreo válidos para funciones de tipo exponencial E_R, es decir, distribuciones cuya transformada de Fourier es de soporte compacto contenido en $[-R, R]^N$. Estos resultados que establecen que, para dichas funciones, el tamaño de las p-normas de Lebesgue de la función y de su restricción a $\mathbb{Z}^N$ son comparables ([B]), son generalizados a familias de funciones de tipo exponencial en el **Capítulo 1**.

En el **Capítulo 2** se presentan diversas definiciones de los espacios de Hardy discretos en una dimensión, como son:

- Una caracterización en términos de la transformada discreta de Hilbert.
- Vía una función maximal asociada a una versión discreta del núcleo de Poisson.
- Mediante funciones maximales en las que el núcleo de Poisson se sustituye por la restricción a los enteros de una función $\Phi \in \mathcal{S}$.
- A través de funciones de área continuas y discretas.
- La descomposición atómica de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z})$.

Se prueban las correspondientes equivalencias entre estas caracterizaciones y, por último, se relaciona la teoría expuesta con el trabajo de Macías y Segovia [MS], estableciendo una caracterización grand-maximal de los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}$.

Parte de los resultados de este capítulo, así como los referentes a la generalización de teoremas de muestreo para funciones de tipo exponencial, presentados en el primer capítulo se encuentran recogidos en el artículo [BC].

El **Capítulo 3** generaliza la caracterización maximal en términos del discretizado del núcleo de Poisson a varias dimensiones y a partir de esa definición del espacio $H^p(\mathbb{Z}^N)$ se establecen interesantes propiedades que relacionan funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ de tipo exponencial con sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$; en particular se generaliza el resultado clásico de muestreo de Shannon para funciones de tipo exponencial en espacios de Lebesgue ([B], [S]) a espacios de Hardy. Asimismo, en esta sección se establece la relación de nuestra teoría con el trabajo desarrollado por C. Eoff en [E] en el cual presenta los espacios $H^p(\mathbb{Z})$ como discretizados de los llamados espacios de Paley-Wiener (funciones de tipo exponencial que se encuentran en L^p para $0 < p \leq 1$). En su trabajo, Eoff parte de la caracterización de $H^p(\mathbb{Z})$ vía la transformada discreta de Hilbert, dejando pendiente la equivalencia con la caracterización original de [CW2].

En el **Capítulo 4**, se aplican los resultados del capítulo anterior a la discretización de operadores de convolución y a otros tipos de operadores integrales definidos sobre espacios de Hardy. Recíprocamente, queda probado como, a partir de la acotación de un operador discreto definido sobre sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$, puede deducirse la acotación de un operador de convolución sobre un conjunto denso en el espacio $H^p(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, se muestran diversas aplicaciones como resultado de esta teoría.

El **Capítulo 5** aborda la equivalencia de las diferentes caracterizaciones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en dimensión $N \geq 2$ con la presentada en el Capítulo 3 mediante el discretizado del núcleo de Poisson. Estas nuevas caracterizaciones son:

- La correspondiente a las transformadas discretas de Riesz para $p > (N-1)/N$.
- Las dadas por funciones maximales discretas mediante núcleos que son restricción a $\mathbb{Z}^N$ de funciones de la clase $\mathcal{S}$.
- Las provenientes de funciones de área.
- Las representaciones mediante átomos de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en el rango $0 < p \leq 1$.

Las diferentes restricciones en cuanto al rango de p, en alguna de las caracterizaciones, y el uso, en ciertos casos, de técnicas diferentes a las empleadas en el Capítulo 2, justifican el que los resultados de los Capítulos 2 y 5 se presenten por separado.

Esta memoria concluye con la inclusión de un apéndice referente a la dualidad $H^1(\mathbb{Z})$-BMO$(\mathbb{Z})$. Además del resultado principal de identificación del dual de $H^1(\mathbb{Z})$, en dicho apéndice se dan propiedades que relacionan los espacios BMO en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$. Estas propiedades junto con las presentadas en el mismo sentido en el Capítulo 2 sobre los espacios $H^1(\mathbb{R})$ y $H^1(\mathbb{Z})$, permiten obtener la dualidad en $\mathbb{Z}$ a partir del correspondiente resultado en $\mathbb{R}$.

Para finalizar esta introducción, quiero expresar, en primer lugar, mi agradecimiento a María Jesús Carro, directora de esta memoria, por su inestimable ayuda, gran disponibilidad e interés demostrados en el desarrollo de este trabajo. En general, mi reconocimiento al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona por la colaboración y apoyo prestados. Por último, expresar mi gratitud hacia al Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya y en especial a los miembros de la Sección de Matemáticas de la Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú, por contribuir a la creación del clima de trabajo idóneo para llevar a cabo este trabajo.

Barcelona, Julio de 1998.

Capítulo 1

Resultados sobre funciones de tipo exponencial

Notaremos por E_R al espacio de distribuciones de tipo exponencial, es decir, el subespacio de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ formado por aquellas distribuciones temperadas cuya transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-R, R]^N$. Debido al teorema de Paley-Wiener ([R], p.190), una distribución cuya transformada de Fourier tiene soporte compacto es la restricción a $\mathbb{R}^N$ de una función analítica de tipo exponencial. Por ello tiene sentido hablar del valor en un punto de dicho tipo de funciones. Más exactamente, si $f \in E_R$, existen dos constantes positivas C y M tales que

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^M \; e^{R|y|}, \; z = x + iy \in \mathbb{C}^N.$$

De la desigualdad anterior, deducimos que las distribuciones de tipo exponencial son funciones cuyo valor absoluto está mayorado por un polinomio.

Resultados clásicos en la teoría de funciones de tipo exponencial implican que, si $0 < p \leq \infty$, la p-norma de Lebesgue de una función g de E_R con $R < 1/2$ es comparable a la de la sucesión formada por la restricción a $\mathbb{Z}^N$ de g (Lemas 1.2 y 1.3).

P. Auscher y M.J. Carro en [AC] generalizan parte de este resultado al caso de familias de funciones de tipo exponencial en el caso $1 \leq p \leq \infty$ (Lema 1.4). En los Lemas 1.5 y 1.6 se completa dicho resultado a todo el rango $0 < p \leq \infty$, estableciéndose que si $\{g_t\}_{t>0}$ es una familia de funciones de tipo exponencial E_R con $R < 1/2$, y

$0 < q \leq \infty$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \, \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \, dx \right)^{1/p} \sim \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \, \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \right)^{1/p}.$$

En este capítulo mediante la notación $\{g_t\}_{t>0}$ representaremos a una familia arbitraria de funciones, que no necesariamente ha de provenir de las dilataciones de una función fija g.

Los resultados que acabamos de mencionar constituyen, en gran medida, la base de la teoría sobre espacios de Hardy discretos y su relación con los espacios de Hardy clásicos $H^p(\mathbb{R}^N)$, que desarrollaremos en posteriores capítulos.

Recordemos que el teorema de Shannon ([S]) establece que si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap E_R$, con $R < 1/2$, f está determinada unívocamente por su restricción a $\mathbb{Z}^N$. Más exactamente,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} f(k) \text{ sinc } (x - k),$$

donde las sumas parciales de la serie convergen a f en norma L^2, y

$$\text{sinc } x := \prod_{j=1}^N \frac{\sin \pi x_j}{\pi x_j},$$

con $\dfrac{\sin \pi x_j}{\pi x_j} = 1$, si $x_j = 0$.

El siguiente lema establece una generalización del teorema de Shannon para distribuciones temperadas que son de tipo exponencial y en el que el papel de la función sinc se sustituye por otras funciones de decrecimiento más rápido. Dicho resultado será fundamental para el desarrollo de nuestra teoría y de aquí que incluyamos su demostración.

Lema 1.1 ([FJW]) *Sea $0 < R < 1/2$ y sean $g \in \mathcal{S}' \cap E_R$ y $h \in \mathcal{S} \cap E_R$, tal que $\hat{h} \equiv 1$ sobre sop $\hat{g}$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(k) \; h(x - k).$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $g \in \mathcal{S}$. Si desarrollamos $\hat{g}$ en serie de Fourier en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$, podemos escribir

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left\{ \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^N} \hat{g}(y) e^{2\pi i k \cdot y}\, dy \right\} e^{-2\pi i k \cdot \xi}, \ \forall \xi \in [-1/2, 1/2]^N.$$

Puesto que $\hat{g}$ está soportada en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$, podemos sustituir dicho intervalo por $\mathbb{R}^N$ en la integral anterior y, por tanto ésta es igual a $(\hat{g})\check{}(k) = g(k)$. De aquí obtenemos que

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(k) e^{-2\pi i k \cdot \xi}, \ \forall \xi \in [-1/2, 1/2]^N.$$

Fuera de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$, la suma del miembro derecho representa a la extensión periódica de $\hat{g}$. Puesto que sop $\hat{h} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$, podemos sustituir $\hat{g}$ por su extensión periódica sin alterar el producto $\hat{g}\hat{h}$. Haciendo esto y utilizando las identidades $g(x) = (g * h)(x) = (\hat{g}\hat{h})^{\vee}(x)$, obtenemos que

$$g(x) = (g * h)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(k) (\hat{h}(\xi) e^{-2\pi i k \cdot \xi})^{\vee}(x) = \sum_k g(k)\ h(x - k).$$

Esto prueba el lema para funciones $g \in \mathcal{S}$. El caso $g \in \mathcal{S}'$ podemos deducirlo del que acabamos de probar mediante el siguiente argumento de regularización. Puesto que g es una distribución de tipo exponencial y, por tanto, una función continua, definimos para cada ϵ

$$g(x; \epsilon) = \gamma(\epsilon x) g(x),$$

donde $\gamma \in \mathcal{S}$ satisface que $\gamma(0) = 1$ y sop $\hat{\gamma} \subset \{\xi; |\xi| \leq 1\}$. Si notamos por $(\hat{\gamma})_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^N} \hat{\gamma}(\frac{\cdot}{\epsilon})$, se tiene que

$$\hat{g}(\cdot; \epsilon) = (\hat{\gamma})_\epsilon * \hat{g} \in C^\infty, \ \ \text{sop}\ \hat{g}(\cdot; \epsilon) \subset \text{sop}\ \hat{g} + \{\xi; |\xi| \leq \epsilon\}.$$

Esto nos permite aplicar el caso anterior a la función $g(\cdot; \epsilon) \in \mathcal{S}$, para todo ϵ suficientemente pequeño, obteniendo

$$(g(\cdot; \epsilon) * h)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} g(k; \epsilon) h(x - k).$$

El hecho de que la distribución g sea una función cuyo valor absoluto esta mayorado por un polinomio y que $h \in \mathcal{S}$, nos permite aplicar el teorema de convergencia dominada a la convolución $g(\cdot; \epsilon) * h$ y hacer tender ϵ a cero para deducir el lema. $\square$

Recordamos, asimismo, otros teoremas de muestreo válidos para este tipo de funciones (ver [B], p.101).

Lema 1.2 *Sea* $0 < p \leq \infty$. *Entonces, existe una constante* $C = C(p, N)$ *tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} |g(n)|^p \leq C^p \ max \ (1, R^N) \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p \ dx,$$

para cualquier $g \in E_R$.

El recíproco de este resultado es también válido, con la restricción $R < 1/2$.

Lema 1.3 *Sea* $0 < p \leq \infty$. *Entonces, si* $g \in E_R$, *con* $R < 1/2$, *se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|^p \ dx \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} |g(n)|^p,$$

para cierta constante $C = C(R, p, N)$.

Notamos que la restricción $R < 1/2$ es necesaria. Algunos contraejemplos en una variable son la función sinc x , si $0 < p \leq 1$, y la función sinc $x + \sin \pi x$, si $1 < p < \infty$. En ambos casos $R = 1/2$.

El Lema 1.2 admite la siguiente generalización, (ver [AC]):

Lema 1.4 *Sea* $1 \leq p \leq \infty, \ 0 < q \leq \infty$. *Entonces, existe una constante* $C = C(p, q, N)$ *tal que,*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \ \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \leq C \ max \ (1, R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \ \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \ dx,$$

para toda familia $g_t, \ t > 0$, *de funciones medibles de* E_R.

Usando argumentos similares, podemos probar que el Lema 1.4 puede ser extendido al caso $0 < p \leq 1$.

Lema 1.5 *Sea* $\{g_t(\cdot)\}_{t>0}$ *una familia de funciones de* E_R. *Si* $0 < p \leq 1$ *y* $0 < q \leq \infty$, *se cumple que*

$$\sum_{n \in Z^N} \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^p \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \leq C max \ (1, R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} \ dx,$$

para cierta constante $C = C(p, q, N)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $p \leq q$ y consideramos el exponente conjugado de q/p, es decir, $q/(q-p)$.

Entonces, es suficiente probar que para toda familia $\{h_t(n)\}_{n \in Z^N}$ de sucesiones finitas con la condición $\int_0^\infty |h_t(n)|^{pq/(q-p)} \frac{dt}{t} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^N$, se verifica la desigualdad

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \int_0^\infty |g_t(n)|^p |h_t(n)|^p \frac{dt}{t} \leq C \max\,(1, R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx.$$

Definimos

$$h_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} h_t(n) \psi(x-n), \ \forall t > 0,$$

donde ψ ha de ser de tipo exponencial, $\psi(0) = 1, \ \psi(k) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^N, \ k \neq 0$ con la condición

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} |\psi(x-n)|^p \leq C < \infty,$$

con C independiente de x. Basta tomar $\psi(x) = \operatorname{sinc}^m(x)$, donde m, entero positivo, ha de ser suficientemente grande para verificar la condición de p-sumabilidad impuesta. De esta forma sop $\hat{\psi} \subset [-m, m]^N$.

Por la desigualdad integral de Minkowski, se tiene que

$$\int_0^\infty |h_t(x)|^{pq/(q-p)} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} h_t(n) \psi(x-n) \right|^{pq/(p-q)} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \int_0^\infty \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} |h_t(n)|^p |\psi(x-n)|^p \right)^{q/(q-p)} \frac{dt}{t}$$

$$\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} |\psi(x-n)|^p \left(\int_0^\infty |h_t(n)|^{pq/(q-p)} \frac{dt}{t} \right)^{(q-p)/q} \right)^{q/(q-p)} \leq C.$$

Para cada $t > 0$, g_t y h_t son funciones mayoradas en valor absoluto por polinomios, por tanto $g_t h_t$ es una distribución temperada, más exactamente, $g_t h_t(\cdot) \in E_{R+m}$, y así por el Lema 1.2, obtenemos

$$\int_0^\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} |g_t(n)h_t(n)|^p \ \frac{dt}{t} \le C\text{max }(1,R^N) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |g_t(x)h_t(x)|^p dx \ \frac{dt}{t}$$

$$\le \ C\text{max }(1,R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |h_t(x)|^{pq/(q-p)} \ \frac{dt}{t}\right)^{(q-p)/q} \ \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \ dx$$

$$\le \ C\text{max }(1,R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \ dx\cdot$$

En el caso $q<p$, escribimos $r=p/q>1$. Entonces es suficiente probar que

$$\int_0^\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} |g_t(n)|^q |l(n)|^q \frac{dt}{t} \le C^p \text{max }(1,R^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \ dx\right)^{q/p},$$

donde $l=\{l(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N}$ es cualquier sucesión finita con la condición $\|l\|_{qr'}\le 1$. Definimos

$$l(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} l(n)\Psi(x-n),$$

donde Ψ es como anteriormente. Tomando Ψ con m adecuado, observamos que l define una función de tipo exponencial satisfaciendo $\|l(\cdot)\|_{qr'}\le C$. Aplicamos el Lema 1.2 con exponente q y obtenemos

$$\int_0^\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} |g_t(n)|^q |l(n)|^q \ \frac{dt}{t} \le C \text{ max }(1,R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty |g_t(x)|^q |l(x)|^q \ \frac{dt}{t} dx$$

$$\le \ C \text{ max }(1,R^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \ \frac{dt}{t}\right)^r \ dx\right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |l(x)|^{qr'} \ dx\right)^{1/r'}$$

$$\le \ C \text{ max }(1,R^N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \ dx\right)^{q/p} \cdot \ \square$$

Para resultados posteriores nos será de utilidad una generalización del Lema 1.3 a familias de funciones de tipo exponencial que, asimismo, nos proporcionará el recíproco del Lema 1.5.

Lema 1.6 *Sean* $0<p\le\infty$, $0<q\le\infty$ *y* $0<R<1/2$. *Sea* $\{g_t(\cdot)\}_{t>0}$ *una familia de funciones de la misma clase* E_R. *Se verifica que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \ dx \le C \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q},$$

para cierta constante $C = C(p, q, N, R)$

Demostración. Tomamos $\Psi \in \mathcal{S} \cap E_{R+\epsilon}$ con $R + \epsilon < 1/2$, y tal que $\hat{\Psi} \equiv 1$ en sop $\hat{g}_t$ para todo $t > 0$. Como consecuencia del Lema 1.1, podemos escribir que

$$g_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} g_t(n)\Psi(x - n),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Usaremos esta representación de la familia $\{g_t\}_{t>0}$ en el desarrollo de la demostración, para la cual distinguiremos cuatro casos.

Si $0 < p \leq 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, podemos usar la desigualdad integral de Minkowski en q y obtener que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty \left| \sum_n g_t(n)\Psi(x-n) \right|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_n |\Psi(x-n)| \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_n |\Psi(x-n)|^p \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \\
&= \|\Psi\|_p^p \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q}.
\end{aligned}$$

Si $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, observamos que, debido a las desigualdades de Minkowski en q y Hölder con exponentes conjugados p y p',

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} &\leq \sum_n |\Psi(x-n)| \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&\leq \left[\sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} |\Psi(x-n)| \right]^{1/p} \left(\sum_n |\Psi(x-n)| \right)^{1/p'} \\
&\leq C \left[\sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} |\Psi(x-n)| \right]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Elevando cada miembro de esta desigualdad a exponente p e integrando en $x \in \mathbb{R}^N$, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t} \right)^{p/q} |\Psi(x-n)|\, dx$$

$$= C\|\Psi\|_1 \sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q}.$$

En el caso $0 < q < 1$ y $p/q \leq 1$, observamos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \left|\sum_n g_t(n)\Psi(x-n)\right|^q \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \sum_n |g_t(n)|^q |\Psi(x-n)|^q \frac{dt}{t} \\ &= \sum_n |\Psi(x-n)|^q \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right). \end{aligned}$$

Elevamos ambos miembros de la desigualdad anterior al exponente p/q, integramos en $x \in \mathbb{R}^N$ y nos resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_n |\Psi(x-n)|^q \int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_n |\Psi(x-n)|^p \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} dx \\ &= \sum_n \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi(x-n)|^p \, dx \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \\ &= \|\Psi\|_p^p \sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q}. \end{aligned}$$

Si $p/q > 1$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados p/q, $(p/q)' = p/(p-q)$ y obtener que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t} \leq \sum_n |\Psi(x-n)|^q \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right) \\ \leq &\left(\sum_n |\Psi(x-n)|^q \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q}\right)^{q/p} \left(\sum_n |\Psi(x-n)|^q\right)^{(p-q)/p}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty |g_t(x)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_n |\Psi(x-n)|^q \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} dx \\ &= C \sum_n \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi(x-n)|^q \, dx\right) \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q} \\ &= C\|\Psi\|_q^q \sum_n \left(\int_0^\infty |g_t(n)|^q \frac{dt}{t}\right)^{p/q}. \square \end{aligned}$$

Un resultado bien conocido sobre funciones de tipo exponencial afirma que una función $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap E_R$ se encuentra también en $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \geq p$. Como consecuencia del Lema 1.5 y el anterior podemos extender dicho resultado a distribuciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ que son de tipo exponencial.

Corolario 1.7 *Sea $0 < p \leq 1$ y $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap E_R$. Si q es tal que $0 < p \leq q < \infty$, entonces $f \in H^q(\mathbb{R}^N)$ y, además, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_{H^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\ R^{N(1/p-1/q)} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración. Por la invariancia por dilataciones de los espacios de Hardy, podemos restringirnos, en primer lugar, al caso $0 < R < 1/2$. Basta aplicar los Lemas 1.5 y 1.6 a la familia de funciones de E_R, $\{P_t * f\}_{t>0}$ para obtener que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^q(\mathbb{R}^N)} &= \|\sup_{t>0} |P_t * f|\ \|_q \leq C \|\{(\sup_{t>0} |P_t * f|\})^d\ \|_q \\
&\leq C\|\{(\sup_{t>0} |P_t * f|)^d\}\ \|_p \leq C\|\sup_{t>0} |P_t * f|\ \|_p = C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Para el caso general $R > 0$, observamos que si sop $\hat{f} \subset (-R, R)^N$, sop $(f_{2R})\hat{} \subset (-1/2, 1/2)^N$, con lo cual, reduciéndonos al caso anterior, obtenemos que

$$(2R)^{N(1/q-1)} \|f\|_{H^q(\mathbb{R}^N)} = \|f_{2R}\|_{H^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f_{2R}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C(2R)^{N(1/p-1)} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)},$$

de donde se deduce el corolario en el caso general. $\square$

Revisando la demostración de los Lemas 1.5 y 1.6, observamos que la medida dt/t, puede sustituirse por cualquier otra medida $d\mu(t)$, σ-finita. En particular, si tomamos $d\mu(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{t_k}(t)$, podemos formular el siguiente resultado, equivalente al de dichos lemas para el caso de familias numerables de funciones de tipo exponencial.

Lema 1.8 *Sean $0 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $\{g_{t_k}(\cdot)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una familia de funciones de tipo exponencial E_R. Se verifica que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_{t_k}(n)|^q \right)^{p/q} \leq C_1\ \max(1, R^N) \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_{t_k}(x)|^q \right)^{p/q} dx.$$

En el caso $R < 1/2$, se verifica además que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_{t_k}(x)|^q \right)^{p/q} dx \leq C_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_{t_k}(n)|^q \right)^{p/q}.$$

Donde las constantes C_1 y C_2 dependen de p, q y N.

Capítulo 2

Caracterizaciones de los espacios de Hardy discretos

En este capítulo presentamos diversas definiciones de los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}$ que consisten en discretizar de manera natural diferentes caracterizaciones conocidas para $H^p(\mathbb{R})$ y probamos la equivalencia entre los diferentes espacios resultantes de esta discretización.

El espacio $H^1(\mathbb{Z})$ es mencionado por Coifman y Weiss, en ([CW2]), como el formado por las sucesiones $a = \{a(n)\}_n$ de $l^1(\mathbb{Z})$ que satisfacen

$$\sum_k \left| \sum_{n \neq k} \frac{a(n)}{k-n} \right| < \infty;$$

es decir, cuya transformada discreta de Hilbert pertenece a $l^1(\mathbb{Z})$. En [E] se extiende dicha definición al caso $0 < p < 1$ y se prueba un isomorfismo entre estos espacios de Hardy discretos y los espacios de Paley-Wiener de funciones de tipo exponencial pertenecientes a $L^p(\mathbb{R})$, si bien no se demuestra que los espacios así definidos sean equivalentes a los espacios $H^p(\mathbb{Z})$ atómicos ($H^p_{at}(\mathbb{Z})$), originales en la literatura ([CW2], [MS]). Dicha equivalencia quedará probada en los Teoremas 2.19 y 2.26.

Para $P_t(x)$ el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}$, definimos el correspondiente núcleo discretizado como

$$P_t^d(n) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + n^2}, \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ P_t^d(0) = 0,$$

para todo $t > 0$. Podemos definir el espacio $H^p(\mathbb{Z})$ como el formado por las sucesiones $a \in l^p(\mathbb{Z})$ tales que la sucesión maximal $\sup_{t>0} |P_t^d \star a| \in l^p(\mathbb{Z})$ (por el símbolo $\star$

representaremos la convolución discreta de dos sucesiones). La acotación en $l^p(\mathbb{Z})$ para $p > 1$ del operador maximal

$$\{a(n)\}_n \to \left\{ \sup_{t>0} \left| \sum_{m\neq 0} \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+m^2} a(n-m) \right| \right\}_n$$

probada en [AC], implica que $H^p(\mathbb{Z})$ y $l^p(\mathbb{Z})$ coinciden si $p > 1$. Probaremos en el Teorema 2.9 que esta caracterización maximal de los espacios de Hardy discretos es equivalente a la mencionada anteriormente en términos de la transformada discreta de Hilbert.

Como ocurre en el caso real, el núcleo de Poisson puede ser reemplazado por cualquier función $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ con $\int \Phi = 1$; es decir, veremos que $H^p(\mathbb{Z})$ consiste en el espacio de sucesiones $a \in l^p(\mathbb{Z})$ tales que $\sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a|$ es de $l^p(\mathbb{Z})$. En todo este capítulo, para $t > 0$ y $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, Φ_t^d representará a la sucesión $\Phi_t^d(n) = 1/t\Phi(n/t)$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\Phi_t^d(0) = 0$. En el Teorema 2.12, probaremos que todas estas caracterizaciones maximales son equivalentes sea cual sea $\Phi \in \mathcal{S}$.

La teoría de Littlewood-Paley se aplica a la caracterización de los espacios de Hardy en $\mathbb{R}^N$ para describir las distribuciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ en términos de funciones de área continuas y discretas (ver [St1] y [St2]). Aquí presentamos las correspondientes versiones discretas de estas caracterizaciones y vemos la equivalencia con las anteriormente descritas (Teoremas 2.14 y 2.16). Una de estas caracterizaciones en términos de funciones de área discreta es la que Q. Sun considera en [Su1].

Finalmente, partiendo de la descomposición atómica del espacio $H^p(\mathbb{R})$, presentamos el correspondiente resultado en $\mathbb{Z}$ y obtenemos, de esta manera, la equivalencia del espacio de Hardy atómico en $\mathbb{Z}$ introducido por Coifman y Weiss con los espacios dados por las definiciones anteriores (Teoremas 2.19 y 2.26). Este resultado nos permitirá, asimismo, establecer la conexión con otros trabajos sobre espacios de Hardy en espacios de tipo homogéneo (Teorema 2.29), como es [MS] en el que se da una caracterización grand-maximal en el rango $1/2 < p \leq 1$ de dichos espacios.

2.1 Caracterización en términos de la transformada discreta de Hilbert

Las funciones de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que se encuentran en los espacios de $H^p(\mathbb{R}^N)$ pueden caracterizarse en términos de la acotación en L^p de operadores integrales singulares. Este hecho recogido en el siguiente teorema de A. Miyachi para dimensión uno, hace pensar en la transferencia de dicha caracterización a los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}$ mediante el uso del operador transformada discreta de Hilbert. Dicha caracterización que como hemos mencionado anteriormente aparece ya en la literatura, queda recogida en la Definición 2.2.

Teorema 2.1 ([Mi]) *Si* $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap H^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, *entonces, tanto* f *como su transformada de Hilbert* Hf*, son de* $L^p(\mathbb{R})$*. Es más, existen constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tales que*

$$C_1(\|f\|_p + \|Hf\|_p) \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq C_2(\|f\|_p + \|Hf\|_p).$$

Definición 2.2 *Sea* $0 < p \leq 1$*. Definimos el espacio*

$$H^p_{Hilb}(\mathbb{Z}) = \left\{a \in l^p(\mathbb{Z}) \text{ tales que } H^d a \in l^p(\mathbb{Z})\right\}$$

con la $p-$*norma*

$$\|a\|_{H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})} = \|a\|_p + \|H^d a\|_p,$$

donde H^d *representa el operador transformada discreta de Hilbert definido como*

$$(H^d a)(m) = \sum_{n \neq m} \frac{a(n)}{m-n}.$$

Observación. Para $p = 1$ dicha definición está mencionada por Coifman y Weiss en [CW2] como una caracterización del espacio $H^1(\mathbb{Z})$.

Consideramos el espacio $H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})$ como el subespacio de $l^p(\mathbb{Z})$ formado por las sucesiones a para las cuales se satisface que

$$\{(H^d_\alpha\, a)(k)\}_k = \left\{\sum_n \frac{a(n)}{k-n+\alpha}\right\}_k \in l^p(\mathbb{Z}).$$

Es decir, sustituimos el operador transformada discreta de Hilbert por el operador de convolución discreto con núcleo $1/(n+\alpha)$, con α real no entero. La correspondiente p-norma asociada al espacio es

$$\|a\|_{H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})} = \|a\|_p + \|H^d_\alpha \; a\|_p.$$

En [E], C. Eoff, consideró esta caracterización del espacio $H^p(\mathbb{Z})$ para $\alpha = 1/2$. En la Proposición 2.4, probaremos que las normas $\|.\|_{H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})}$ y $\|.\|_{H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})}$ son equivalentes.

Lema 2.3 *Sea $a \in l^1(\mathbb{Z})$, k_0 un entero positivo y $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap E_R$, una función par tal que $\hat{\Phi}(0) = 1$, $\int_{\mathbb{R}} x^k \; \Phi(x)dx = 0$, $1 \le k \le k_0 - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Si*

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\Phi(x-n),$$

Se cumple que existe una constante positiva $C = C(\hat{\Phi}, k_0)$ tal que para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\left|Hg(m+\alpha) - H^d_\alpha a(m)\right| \le C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a(n)|}{|m-n+\alpha|^{k_0}},$$

(si $\alpha = 0$, H^d_0 es el operador transformada discreta de Hilbert H^d).

Demostración. El hecho de que $a \in l^1(\mathbb{Z})$ implica que $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap E_R \subset L^2(\mathbb{R})$, y su transformada de Fourier

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)e^{-2\pi i n\xi}\widehat{\Phi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Asimismo, $Hg \in L^2(\mathbb{R})$ es también una función de tipo exponencial E_R y, por tanto continua. De aquí que podamos utilizar el teorema de inversión en todo punto para evaluar Hg. En particular, si $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(2.1) \qquad Hg(m+\alpha) &= (-\pi i \; \mathrm{sign}(\xi) \; \hat{g}(\xi))\check{\ } (m+\alpha) \\
&= -\pi i \int_0^R \hat{g}(\xi) \; e^{2\pi i(m+\alpha)\xi} \; d\xi + \pi i \int_{-R}^0 \hat{g}(\xi) \; e^{2\pi i(m+\alpha)\xi} \; d\xi \\
&= -\pi i \int_0^R \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\widehat{\Phi}(\xi)e^{-2\pi i n\xi} \right) e^{2\pi i(m+\alpha)\xi} \; d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \pi i \int_{-R}^{0} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\widehat{\Phi}(\xi) e^{-2\pi i n\xi} \right) e^{2\pi i(m+\alpha)\xi}\ d\xi \\
&= \quad 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) \int_0^R \widehat{\Phi}(\xi) \sin(2\pi(m-n+\alpha)\xi)\ d\xi.
\end{aligned}
$$

Mediante integración por partes, podemos demostrar la siguiente fórmula de recurrencia, válida para todo entero $1 \le k \le k_0$ y $n \neq m+\alpha$

$$
\int_0^R \hat{\Phi}(\xi) \sin(2\pi(m-n+\alpha)\xi)\ d\xi = \frac{1}{2\pi(m-n+\alpha)} + I_k \tag{2.2}
$$

donde

$$
I_k = \frac{1}{(2\pi)^k (m-n+\alpha)^k} \int_0^R \frac{d^k\hat{\Phi}}{d\xi^k}(\xi) \sin\left(2\pi(m-n+\alpha)\xi + \frac{\pi}{2}k\right)\ d\xi.
$$

En efecto, podemos proceder por inducción sobre el índice k. Si integramos por partes en el miembro izquierdo de (2.2) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^R \hat{\Phi}(\xi) \sin(2\pi(m-n+\alpha)\xi)\ d\xi = \left[-\hat{\Phi}(\xi) \frac{\cos(2\pi(m-n+\alpha)\xi)}{2\pi(m-n+\alpha)} \right]_0^R \\
&+ \frac{1}{2\pi(m-n+\alpha)} \int_0^R (\hat{\Phi})'(\xi) \cos(2\pi(m-n)\xi)\ d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi(m-n+\alpha)} + \frac{1}{2\pi(m-n+\alpha)} \int_0^R (\hat{\Phi})'(\xi) \cos(2\pi(m-n+\alpha)\xi)\ d\xi.
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que $\widehat{\Phi}(0) = 1$ y que sop $\widehat{\Phi} \subset [-R, R]$. Esto prueba (2.2) para $k = 1$. Si suponemos la fórmula válida hasta un cierto orden k, para probarla para el orden $k+1$ basta observar que si $1 \le k \le k_0 - 1$

$$
I_k = I_{k+1},
$$

usando de nuevo integración por partes y el hecho de que las derivadas en el cero de la función $\widehat{\Phi}$ son nulas hasta el orden $k_0 - 1$.

Si sustituimos la expresión dada por (2.2) para $k = k_0$ en (2.1), deducimos que existe una constante positiva $C = C(\hat{\Phi}, k_0)$, de manera que, para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$
\left| Hg(m+\alpha) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a(n)}{m-n+\alpha} \right| \le C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|a(n)|}{|m-n+\alpha|^{k_0}}.
$$

Teniendo en cuenta que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la integral en (2.2) es cero si $n = m + \alpha$, queda probado el lema.$\square$

Proposición 2.4 *Sea* $0 < p \leq 1$, *las* p*-normas* $\| \cdot \|_{H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})}$ *y* $\| \cdot \|_{H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})}$ *son equivalentes, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *.*

Demostración. Basta ver que dada una sucesión a, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \|a\|_{H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})} \leq C_2 \|a\|_{H^p_{Hilb,\alpha}(\mathbb{Z})}. \tag{2.3}$$

Para ver la primera de las desigualdades, observamos que si

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\ \Phi(x - n),$$

es como en el Lema 2.3, y tomamos la función $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap E_R$ con $R < 1/2$, de forma que el entero k_0 cumpla que $p \cdot k_0 > 1$, se obtiene, como consecuencia de dicho lema que

$$\|(Hg)^d(\cdot + \alpha) - H^d_\alpha a\|_p^p \leq C \|a\|_p^p,$$

para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia de esta estimación y de los Lemas 1.2 y 1.3 aplicado a las funciones de tipo exponencial $Hg(\cdot + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|H^d_\alpha a\|_p &\leq \|H^d_\alpha a - (Hg)^d(\cdot + \alpha)\|_p + \|(Hg)^d(\cdot + \alpha)\|_p \\
&\leq C(\|a\|_p + \|Hg\|_p) \leq C(\|a\|_p + \|(Hg)^d\|_p) \\
&\leq C(\|a\|_p + \|(Hg)^d - H^d a\|_p + \|H^d a\|_p) \\
&\leq C(\|a\|_p + \|H^d a\|_p) = C\|a\|_{H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})}.
\end{aligned}$$

De manera análoga, se prueba la segunda desigualdad de (2.3). $\square$

A partir de la Definición 2.2 del espacio $H^p(\mathbb{Z})$, podemos establecer la siguiente proposición que nos será de utilidad en éste y posteriores capítulos.

Proposición 2.5 *Sea* $j \geq 1$ *un entero, definimos el operador de convolución discreto* C_j*, como*

$$(C_j a)(n) = \sum_{m \neq 0} \frac{a(n - m)}{m^j}.$$

Se cumple que C_j *es un operador acotado de* $H^p(\mathbb{Z})$ *en* $l^p(\mathbb{Z})$*, para cualquier entero* $j \geq 1$ *y todo* $0 < p \leq 1$.

Demostración. Para la demostración procederemos por inducción sobre j. Si $j=1$, notamos que el operador C_1 es el operador transformada discreta de Hilbert H^d que, por la Definición 2.2 envía $H^p(\mathbb{Z})$ en $l^p(\mathbb{Z})$.

Supongamos que la proposición es cierta para todos los operadores C_j con $1 \leq j \leq j_0$, y vamos a probarla para C_{j_0+1}.

Sea k un entero positivo, consideramos el núcleo $K_k(m) = \frac{1}{m^{j_0}(m-1)\cdots(m-k)}$, si $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0, 1, \cdots, k,\ K_k(m) = 0,\ m = 0, 1, \cdots, k$. Vamos a ver que $\{K_k(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ es núcleo de un operador de convolución de $H^p(\mathbb{Z})$ en $l^p(\mathbb{Z})$. Observamos que, para todo $m \neq 0, 1, \cdots, k$, podemos descomponer el núcleo $K_k(m)$ en fracciones simples, es decir, existen constantes $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{j_0-1}, \beta_1, \cdots, \beta_k$ tales que

$$K_k(m) = \sum_{i=0}^{j_0-1} \frac{\alpha_i}{m^{j_0-i}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{m-i}.$$

De aquí que podamos escribir para todo $n \in \mathbb{Z}$, y toda sucesión a

$$(K_k \star a)(n) = \sum_{i=0}^{j_0-1} \alpha_i \sum_{m\neq 0} \frac{a(n-m)}{m^{j_0-i}} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \sum_{m\neq i} \frac{a(n-m)}{m-i} + \sum_{i=0}^{k} \gamma_i a(n-i),$$

para ciertas constantes $\gamma_i,\ i = 0, \cdots k$. De la expresión anterior observamos que el operador discreto K_k es suma de operadores C_j con $1 \leq j \leq j_0$, más traslaciones del operador transformada discreta de Hilbert y del operador identidad. Con lo cual, debido a la hipótesis de inducción, $(K_k \star a) \in l^p(\mathbb{Z})$ si $a \in H^p(\mathbb{Z})$.

De la misma manera, para todo entero $k \geq 1$, definimos el núcleo $J_k(m) = \frac{1}{m^{j_0+1}(m-1)\cdots(m-k)}$, si $m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0, 1, \cdots, k,\ J_k(m) = 0$, en caso contrario.

Si $m \neq 0, 1, \cdots, k$ se verifica la siguiente relación de recurrencia

$$K_k(m) - J_{k-1}(m) = \frac{k}{m^{j_0+1}(m-1)\cdots(m-k)} = kJ_k(m).$$

La sucesión J_k es núcleo de un operador de convolución en $l^p(\mathbb{Z})$ para $p > \frac{1}{k+j_0+1}$. De la relación anterior podemos escribir para $a \in H^p(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}
(J_{k-1} \star a)(n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)\ J_{k-1}(m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)\ K_k(m) - k \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(n-m)\ J_k(m) + a(n-k)J_{k-1}(k) \\
&= (K_k \star a)(n) - k(J_k \star a)(n) + \frac{a(n-k)}{k!k^{j_0}}.
\end{aligned}$$

Por todo ello, si $p > \frac{1}{k+j_0+1}$, existe una constante $C = C(k)$ tal que

$$\|J_{k-1} \star a\|_p \leq \|K_k \star a\|_p + k\|J_k \star a\|_p + \frac{1}{k!k^{j_0}}\|a\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Análogamente, si $m \neq 0, 1, \cdots, k-1$,

$$K_{k-1}(m) - J_{k-2}(m) = \frac{k-1}{m^{j_0+1}(m-1)\cdots(m-(k-1))} = (k-1)J_{k-1}(m).$$

De lo cual, podemos deducir que

$$J_{k-2}\star : H^p(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^p(\mathbb{Z}),\ p > \frac{1}{k+j_0+1}.$$

Procediendo reiteradamente obtendríamos que $J_1\star : H^p(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^p(\mathbb{Z})$, si $p > \frac{1}{k+j_0+1}$. Además, si $m \neq 0, 1$

$$K_1(m) - C_{j_0+1}(m) = \frac{1}{m^{j_0}(m-1)} - \frac{1}{m^{j_0+1}} = \frac{1}{m^{j_0+1}(m-1)} = J_1(m).$$

Por tanto, también el operador de convolución C_{j_0+1} es acotado de $H^p(\mathbb{Z})$ en $l^p(\mathbb{Z})$, para $p > \frac{1}{k+j_0+1}$.

Tomando $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ suficientemente grande, podemos obtener el resultado enunciado para cualquier p, $0 < p \leq 1$. $\square$

Corolario 2.6 *Si $0 < p \leq 1$, el operador $H^d : H^p(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^p(\mathbb{Z})$ es acotado.*

Demostración. Debido a la caracterización de $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de la transformada discreta de Hilbert tenemos que

$$\|H^d a\|_{H^p(\mathbb{Z})} = \|H^d a\|_p + \|(H^d)^2 a\|_p.$$

Por tanto, basta ver que

$$\|(H^d)^2 a\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Observamos que, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$(H^d)^2 a(n) = H^d(H^d a)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (K \star K)(m) a(n-m),$$

donde $\{K(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es la sucesión que define el núcleo de la transformada discreta de Hilbert, es decir, $K(n)=\frac{1}{n}$ si $n\neq 0$, $K(0)=0$. Un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned}(K*K)(0) &= -\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{3},\\ (K*K)(m) &= -\sum_{n\neq 0,m}\frac{1}{n(n-m)}=-\frac{2}{m^2},\ \text{si } m\neq 0.\end{aligned}$$

De lo cual deducimos que, si C_2 es el operador definido en la proposición anterior,

$$(H^d)^2a(n)=-2(C_2a)(n)-\frac{\pi^2}{3}a(n),$$

y, en consecuencia, que

$$\|(H^d)^2a\|_p\leq C(\|C_2a\|_p+\|a\|_p)\leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.\square$$

2.2 Caracterización maximal asociada al núcleo de Poisson discreto

Como hemos introducido anteriormente, podemos dar la siguiente definición maximal de los espacios de Hardy discretos en términos del discretizado del núcleo de Poisson.

Definición 2.7 *Si $0<p\leq 1$, definimos el espacio*

$$H^p_{max}(\mathbb{Z})=\left\{a\in l^p(\mathbb{Z})\ \textit{tales que}\ \sup_{t>0}|P_t^d\star a|\in l^p(\mathbb{Z})\right\}$$

con la $p-$norma

$$\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z})}=\|a\|_p+\|\sup_{t>0}|P_t^d\star a|\ \|_p.$$

En [AC], P. Auscher y María J. Carro prueban que para $1\leq p<\infty$ y K un núcleo de convolución, la acotación del operador maximal

$$\|\sup_{t>0}|K_t*f|\|_p\leq\|f\|_p,\quad f\in L^p(\mathbb{R}^N),$$

implica que

$$\|\sup_{t>0}|(K_t*\varphi)^d\star a|\|_p\leq C\|a\|_p,\quad a\in l^p(\mathbb{Z}^N),$$

donde $\varphi \in E_R$ es tal que su transformada de Fourier $\hat{\varphi}$ define un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Si tomamos

$$K_t(x) = P_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2},$$

el núcleo de Poisson en dimensión uno, y consideramos la versión discreta del operador asociado a P_t

$$a \longrightarrow \left(\sup_{t>0} \left| \sum_{m\neq 0} \frac{t}{t^2+m^2} a(n-m) \right| \right)_n = \sup_{t>0} |P_t^d \star a|,$$

podemos deducir la acotación fuerte tipo (p,p) en el rango $1 < p < \infty$ para este operador a partir de la acotación para el correspondiente operador continuo. Para ello basta probar que para cierta φ en las anteriores condiciones, la sucesión

$$\{P_t(n) - (P * \varphi)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

define el núcleo de un operador de convolución acotado en $l^p(\mathbb{Z})$ de manera uniforme en $t > 0$. De esta forma, obtendríamos que si extendemos la definición anterior a todo $0 < p \leq \infty$, $H^p_{max}(\mathbb{Z}) = l^p(\mathbb{Z})$, si $1 < p < \infty$, como ocurre en el caso continuo $\mathbb{R}^N$.

Por tanto, necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 2.8 *Sea una función Φ y un entero k_0 en las condiciones del Lema 2.3. Si representamos por $P_t^\Phi = P_t * \Phi$, se verifica que, para todo $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,*

$$|P_t^\Phi(n) - P_t(n)| = O\left(\frac{1}{|n|^{k_0}}\right)$$

uniformemente en $t > 0$.

Demostración. Puesto que, P_t^Φ y $(P_t^\Phi)\widehat{\ }$son de $L^1(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema de inversión de Fourier y concluir que,

$$\begin{aligned} (P_t^\Phi)(n) &= \int_{-R}^{R} \hat{\Phi}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{-2\pi i n\xi}\, d\xi = 2\int_0^R \hat{\Phi}(\xi) e^{-2\pi t\xi} \cos 2\pi n\xi \, d\xi \\ &= \int_0^R \hat{\Phi}(\xi)(e^{2\pi(in-t)\xi} + e^{-2\pi(in+t)\xi})\, d\xi. \end{aligned}$$

Mediante integración por partes en la integral anterior, obtenemos que ésta es igual a

$$\left[\hat{\Phi}(\xi)\left(\frac{e^{2\pi(in-t)\xi}}{2\pi(in-t)}-\frac{e^{-2\pi(in+t)\xi}}{2\pi(in+t)}\right)\right]_0^R-\frac{1}{2\pi(in-t)}\int_0^R(\hat{\Phi})'(\xi)e^{2\pi(in-t)\xi}\,d\xi$$
$$+\quad\frac{1}{2\pi(in+t)}\int_0^R(\hat{\Phi})'(\xi)e^{-2\pi(in+t)\xi}\,d\xi=\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+n^2}+(\mathrm{I})+(\mathrm{II}).$$

Si aplicamos de nuevo integración por partes de forma reiterada en las integrales que definen (I) y (II), y usamos la propiedad de cancelación de momentos hasta orden k_0-1 para la función Φ, obtenemos, respectivamente,

$$(\mathrm{I})=\frac{(-1)^{k_0}}{(2\pi(in-t))^{k_0}}\int_0^R\frac{d^{k_0}\hat{\Phi}}{d\xi^{k_0}}(\xi)e^{2\pi(in-t)\xi}\,d\xi,$$

y

$$(\mathrm{II})=\frac{(-1)^{k_0+1}}{(2\pi(in+t))^{k_0}}\int_0^R\frac{d^{k_0}\hat{\Phi}}{d\xi^{k_0}}(\xi)e^{-2\pi(in+t)\xi}\,d\xi.$$

De aquí, que podamos escribir para todo $n\neq 0$,

$$\begin{aligned}|P_t^{\Phi}(n)-P_t(n)| &= |(\mathrm{I})+(\mathrm{II})|\leq\frac{C(\widehat{\Phi})}{(2\pi)^{k_0}}\left(\left|\frac{1}{(in-t)^{k_0}}\right|+\left|\frac{1}{(in+t)^{k_0}}\right|\right)\\ &\leq \frac{C}{(t^2+n^2)^{\frac{k_0}{2}}}\leq\frac{C}{|n|^{k_0}},\end{aligned}$$

uniformemente en $t>0$.□

Presentamos a continuación, la equivalencia de las dos caracterizaciones dadas hasta el momento de los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}$.

Teorema 2.9 *Sea $0<p\leq 1$, $a\in H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})$ si y sólo si $a\in H^p_{max}(\mathbb{Z})$. Es más,*

$$H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})\sim H^p_{max}(\mathbb{Z})$$

Demostración. Para ver la inclusión continua $H^p_{max}\hookrightarrow H^p_{Hilb}$, basta probar que

$$\|H^d a\|_p\leq C\|a\|_{H^p_{max}}.$$

Si g es como en el Lema 2.3 y tomamos la función $\Phi\in E_R$ con $R<1/2$, y de forma que el entero k_0 cumpla que $p\cdot k_0>1$, se obtiene, como consecuencia de dicho lema, la estimación

$$\|(Hg)^d-H^d a\|_p^p\leq C\left(\sum_m\left(\sum_{n\neq m}|a(n)|\frac{1}{|m-n|^{k_0}}\right)^p\right)\leq C\|a\|_p^p. \tag{2.4}$$

Por otro lado, por ser g y Hg funciones de tipo exponencial se verifica

$$\|g^d\|_p \leq C\|g\|_p, \quad \|(Hg)^d\|_p \leq C\|Hg\|_p. \tag{2.5}$$

Puesto que $a \in H^p(\mathbb{Z}) \subset l^p \subset l^1$ y el núcleo de Poisson $\in L^1(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la sucesión de sumas parciales que define g para poder integrar término a término al calcular $P_t * g$ y escribir que

$$(P_t * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)(P_t * \Phi)(x-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)P_t^\Phi(x-n).$$

Esta serie define una función de tipo exponencial, en particular, continua. Por ello, la igualdad anterior se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$.

Además, como consecuencia del Lema 1.6

$$\| \sup_{t>0} |P_t * g| \|_p \leq C\|(\sup_{t>0} |P_t * g|)^d \|_p = C\| \sup_{t>0} |P_t^\Phi \star a| \|_p.$$

A partir de esta última desigualdad, el Teorema 2.1, (2.4), (2.5) y el Lema 2.8, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|H^d a\|_p &\leq \|(Hg)^d\|_p + C\|a\|_p \leq C(\|Hg\|_p + \|a\|_p) \\
&\leq C(\| \sup_{t>0} |P_t * g|\|_p + \|a\|_p) \leq C\left(\| \sup_{t>0} |P_t^\Phi \star a|\|_p + \|a\|_p\right) \\
&\leq C\left(\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a|\|_p + \|a\|_p\right).
\end{aligned}$$

Para la prueba de la inclusión $H^p_{Hilb} \hookrightarrow H^p_{max}$, basta demostrar que

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p \leq C\left(\|a\|_p + \|H^d a\|_p\right).$$

En efecto, como consecuencia del Lema 1.5 tenemos

$$\| \sup_{t>0} |P_t^\Phi \star a| \|_p = \|(\sup_{t>0} |P_t * g|)^d \|_p \leq \| \sup_{t>0} |P_t * g| \|_p.$$

Utilizando esta estimación, el Lema 2.8 y el Teorema 2.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
&\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p \leq \| \sup_{t>0} |P_t^\Phi \star a| \|_p + C\|a\|_p \\
&\leq \| \sup_{t>0} |P_t * g| \|_p + C\|a\|_p \leq C(\|g\|_p + \|Hg\|_p + \|a\|_p).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ahora bien, si $0 < p \leq 1$

$$\|g\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\Phi(x-n)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x-n)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\|_p \|a\|_p.$$

Por otro lado, Hg es una función de tipo exponencial E_R, $R < 1/2$, por lo que

$$\|Hg\|_p \leq C\|(Hg)^d\|_p \leq C(\|H^d a\|_p + \|a\|_p).$$

A partir de (2.6) y de las estimaciones anteriores, concluimos que

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \; \|_p \leq C(\|a\|_p + \|H^d a\|_p). \; \square$$

En virtud de este teorema, podemos identificar ambos espacios de sucesiones mediante la notación $H^p(\mathbb{Z})$ para cada $0 < p \leq 1$. Asimismo, representaremos por $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{Z})}$ a la p-norma asociada a cualquiera de los espacios anteriores.

Corolario 2.10 *Para todo $\alpha > 0$, sea C_α el operador de convolución discreto definido por*

$$(C_\alpha a)(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{a(n-m)}{m^2+\alpha^2}.$$

Se cumple que C_α es un operador acotado de $H^p(\mathbb{Z})$ en $l^p(\mathbb{Z})$, para todo $0 < p \leq 1$.

Demostración. A partir de la caracterización maximal de $H^p(\mathbb{Z})$, podemos estimar que

$$\begin{aligned}
\|C_\alpha a\|_p &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{a(n-m)}{m^2+\alpha^2} \right|^p \\
&\leq \frac{1}{\alpha^p} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha}{m^2+\alpha^2} a(n-m) \right|^p + \frac{1}{\alpha^{2p}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p \\
&\leq \frac{1}{\alpha^p} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} \left| \sum_{m\neq 0} \frac{t}{t^2+m^2} a(n-m) \right|^p + \frac{1}{\alpha^{2p}} \|a\|_p^p \leq C(\alpha) \|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}^p \cdot \square
\end{aligned}$$

2.3 Otras caracterizaciones maximales de $H^p(\mathbb{Z})$. Caracterizaciones en términos de funciones de área

En la sección anterior hemos presentado una caracterización maximal del espacio $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de una versión discreta del núcleo de Poisson en $\mathbb{R}$. El objetivo de esta sección es probar que dicho núcleo puede ser sustituido por la correspondiente discretización, Φ_t^d de cualquier función $\Phi \in \mathcal{S}$ cuya integral sea 1. La equivalencia de esta caracterización con la anterior en términos del núcleo de Poisson discreto (Teorema 2.12) se basa en el resultado análogo en $\mathbb{R}$ probado por Fefferman y Stein en 1972 ([FS]).

Por otro lado, la teoría de Littlewood-Paley permite caracterizar los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ en términos de funciones de área. En las definiciones 2.13 y 2.15, respectivamente, se introducen las correspondientes versiones discretas de estas caracterizaciones de área continua y discreta para espacios $H^p(\mathbb{Z})$.

Para la prueba de la equivalencia de estas nuevas caracterizaciones con las introducidas en las anteriores secciones, necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 2.11 *Sea $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y φ una función de $\mathcal{S} \cap E_R$ tal que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero $(-\epsilon, \epsilon)$. Para todo $t > 0$, representamos por $\Phi_t^\varphi = (\Phi_t * \varphi)$, entonces*

(a) Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se verifica que para cualquier entero $M \geq 1$

$$|(\Phi_t^\varphi)(n) - (\Phi_t)(n)| = O\left(\frac{1}{|n|^M}\right),$$

uniformemente en $t > 0$.

(b) Si $\int_{\mathbb{R}} \Phi = 0$, existe $\phi(t) \in L^2([0,\infty), \frac{dt}{t})$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $M \geq 2$ entero, se tiene que

$$|(\Phi_t^\varphi)(n) - (\Phi_t)(n)| = \phi(t)\ O\left(\frac{1}{|n|^M}\right).$$

Demostración. En primer lugar, veamos la siguiente fórmula de recurrencia válida para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cualquiera que sea el entero $M \geq 0$

$$
\begin{aligned}
(2.7) \qquad & (\Phi_t^{\varphi})(n) - \Phi_t(n) \\
&= \frac{1}{(2\pi n)^M} \int_{\epsilon \le |\xi| \le R} \frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})}\ d\xi \\
&- \frac{1}{(2\pi n)^M} \int_{|\xi| > R} \frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})}\ d\xi = I_M.
\end{aligned}
$$

Integramos por partes en las dos integrales que definen I_M y deducimos que

$$
\begin{aligned}
I_M \;=\; & \frac{-i}{(2\pi n)^{M+1}} \left[\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)(\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})} \right]_{\xi=\epsilon}^{R} \\
- \; & \frac{i}{(2\pi n)^{M+1}} \left[\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)(\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})} \right]_{\xi=-R}^{-\epsilon} \\
+ \; & \frac{i}{(2\pi n)^{M+1}} \int_{\epsilon \le |\xi| \le R} \frac{d^{M+1} \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^{M+1}}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})}\ d\xi \\
+ \; & \frac{i}{(2\pi n)^{M+1}} \left[\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})} \right]_{\xi=-\infty}^{-R} \\
+ \; & \frac{i}{(2\pi n)^{M+1}} \left[\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot) \right)}{d\xi^M}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})} \right]_{\xi=R}^{\infty} \\
- \; & \frac{i}{(2\pi n)^{M+1}} \int_{|\xi| > R} \frac{d^{M+1} \left(\hat{\Phi}(t\cdot) \right)}{d\xi^{M+1}}(\xi)\ e^{\pi i (2n\xi + \frac{M}{2})}\ d\xi.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que sop $\hat{\varphi} \subset [-R, R]$ observamos que

$$
\left(\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^M} \right)(\pm R) = - \left(\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot) \right)}{d\xi^M} \right)(\pm R) = -t^M \left(\frac{d^M \hat{\Phi}}{d\xi^M} \right)(\pm R t).
$$

Por ser $\hat{\varphi} \equiv 1$ sobre $(-\epsilon, \epsilon)$, vemos que

$$
\left(\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1) \right)}{d\xi^M} \right)(\pm \epsilon) = 0.
$$

También, del hecho de que para $t > 0$ $\hat{\Phi}(t\cdot) \in \mathcal{S}$, se deduce que

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left(\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\right)}{d\xi^M} \right) (\xi) = 0.$$

Estas observaciones nos permiten asegurar que para todo entero $M \geq 0$

$$I_M = I_{M+1}.$$

Por tanto, para todo $M \geq 1$

$$\begin{aligned} I_M = I_0 \;\; &= \int_{\epsilon\leq|\xi|\leq R} \hat{\Phi}(\xi t)\ (\hat{\varphi}(\xi) - 1)\ e^{2\pi i n\xi}\ d\xi \\ &- \int_{|\xi|\geq R} \hat{\Phi}(\xi t)\ e^{2\pi i n\xi}\ d\xi = (\Phi_t^{\varphi})(n) - \Phi_t(n). \end{aligned}$$

Para estimar las integrales que definen la ecuación (2.7), observamos que la fórmula de derivación de Leibnitz aplicada a

$$\frac{d^M \left(\hat{\Phi}(t\cdot)\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1)\right)}{d\xi^M}(\xi),$$

tiene como uno de sus factores a

$$\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1)}{d\xi^M}(\xi),$$

que, para N entero positivo arbitrario, podemos acotar, al ser $\hat{\Phi}$ y $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, por

$$\left|\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M\ (\hat{\varphi}(\cdot) - 1))}{d\xi^M}(\xi)\right| = \left|\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M\hat{\varphi}(\xi)}{d\xi^M}\right| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^N} \in L^1(\mathbb{R},\ d\xi).$$

Si $M \geq 1$, el resto de términos que aparecen contienen derivadas de la función $\Phi(t\cdot)$ de orden $k \geq 1$ y podemos acotarlos por la expresión

$$\left|\frac{d^k\hat{\Phi}(t\cdot)}{d\xi^k}\right|(\xi) \leq \frac{Ct^k}{(1 + |\xi t|)^N}.$$

Puesto que $|\xi| \geq \epsilon$, la expresión anterior es integrable uniformemente en $t > 0$.

Usando estas estimaciones en las integrales que definen el miembro derecho de (2.7), podemos deducir que, para cierta constante $C = C(\hat{\Phi}, \hat{\varphi}, \epsilon, R, M)$, y de manera uniforme en $t > 0$, se verifica que

$$|(\Phi_t^{\varphi} - \Phi_t)(n)| \leq \frac{C}{|n|^M}.$$

Esto prueba la parte (a) del lema. Para el caso en que $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ verifique que $\int \Phi = 0$, observamos que este hecho implica, como consecuencia del teorema del valor medio

$$|\hat{\Phi}(\xi)| = |\hat{\Phi}(\xi) - \hat{\Phi}(0)| \leq A|\xi|.$$

En este caso, el factor

$$\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M\left(\hat{\varphi}(\cdot) - 1\right)}{d\xi^M}(\xi),$$

puede acotarse, si $\epsilon \leq |\xi| \leq R$, mediante

$$\left|\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M(\hat{\varphi}(\cdot) - 1)}{d\xi^M}(\xi)\right| \leq At|\xi| \leq AtR, \quad \text{si } 0 < t < 1,$$

o bien por

$$\left|\hat{\Phi}(t\xi)\frac{d^M\left(\hat{\varphi}(\cdot) - 1\right)}{d\xi^M}(\xi)\right| \leq \frac{C}{(1+t|\xi|)^N} \leq \frac{C}{(1+t\epsilon)^N}, \quad \text{si } t \geq 1.$$

Por otro lado, para $\epsilon \leq |\xi| \leq R$, los factores que contienen derivadas de orden $k \geq 1$ de $\hat{\Phi}(t\cdot)$, pueden acotarse mediante

$$\left|t^k\frac{d^k\hat{\Phi}}{d\xi^k}(t\xi)\ \frac{d^{M-k}(\hat{\varphi}(\cdot) - 1)}{d\xi^{M-k}}\right| \leq \frac{Ct^k}{(1+|\xi t|)^N} \leq \frac{Ct^k}{(1+t\epsilon)^N} \in L^2((0,\infty), dt/t)\cdot$$

Si $M \geq 2$, el resto de términos que aparecen en (2.7) contienen derivadas de orden M, que podemos acotar mediante la expresión

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|>R}\left|\frac{d^M(\hat{\Phi}(t\cdot))}{d\xi^M}\right|(\xi)\ d\xi &\leq \int_{|\xi|>R}\frac{Ct^M}{(1+|\xi t|)^N}\ d\xi \\ &\leq \frac{Ct^{M-1}}{(1+|tR|)^{N-1}} \in L^2((0,\infty), dt/t)\cdot\end{aligned}$$

Utilizando estas estimaciones en las integrales de la ecuación (2.7), podemos encontrar una función $\phi(t)$ en las condiciones del enunciado. □

Observación. La parte (b) del lema anterior se aplicará a la siguiente situación. Sea $a \in l^p(\mathbb{Z})$, $0 < p \leq 1$, Φ y φ funciones en las condiciones del lema anterior, se verifica que

$$\| \, \|\Phi_t^{\varphi} \star a\|_{2,\frac{dt}{t}} \|_p^p \leq C(\| \, \|\Phi_t^d \star a\|_{2,\frac{dt}{t}}\|_p^p + \|a\|_p^p), \tag{2.8}$$

para cierta constante positiva C.

En efecto, mediante la desigualdad triangular y el hecho de que $0 < p \leq 1$, podemos escribir

$$\| \, \|\Phi_t^\varphi \star a\|_{2,\frac{dt}{t}} \|_p^p \leq \| \, \|(\Phi_t^\varphi - \Phi_t^d) \star a\|_{2,\frac{dt}{t}} \|_p^p + \| \, \|\Phi_t^d \star a\|_{2,\frac{dt}{t}} \|_p^p.$$

Observamos que, si aplicamos el Lema 2.11, tomando el entero M tal que $Mp > 1$

$$\begin{aligned}
&\| \, \|(\Phi_t^\varphi - \Phi_t^d) \star a\|_{2,\frac{dt}{t}} \|_p^p \\
= \;& \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^\infty \left| \Phi_t^\varphi(0) a(n) + \sum_{m\neq 0} (\Phi_t^\varphi - \Phi_t^d)(m) a(n-m) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{2}} \\
\leq \;& C \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^\infty |\Phi_t^\varphi(0) a(n)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{2}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^\infty |\phi(t)|^2 \left(\sum_{m\neq 0} \frac{|a(n-m)|}{|m|^M} \right)^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{2}} \right) \\
\leq \;& C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p \left(\int_0^\infty |\Phi_t^\varphi(0)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{2}} + C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\neq 0} \frac{|a(n-m)|}{|m|^M} \right)^p \|\phi\|_{2,\frac{dt}{t}}^p \\
\leq \;& C \|a\|_p^p \left(\|\Phi_t^\varphi(0)\|_{2,\frac{dt}{t}}^p + \|\phi\|_{2,\frac{dt}{t}}^p \right).
\end{aligned}$$

El lema anterior nos asegura que la norma $\|\phi\|_{2,\frac{dt}{t}}$ es finita. Veamos que lo mismo ocurre con $\|\Phi_t^\varphi(0)\|_{2,\frac{dt}{t}}$.

En efecto, de las hipótesis sobre Φ y φ podemos estimar,

$$|\Phi_t^\varphi(0)| = \left| \int_{|\xi|\leq R} \hat{\Phi}(\xi t) \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi \right| \leq C \int_{|\xi|\leq R} \frac{|\xi| t}{(1+|\xi|)^N} \, d\xi \leq Ct,$$

en el caso $0 < t < 1$. Para $t \geq 1$, utilizaremos la estimación

$$|\Phi_t^\varphi(0)| \leq C \int_{|\xi|\leq R} \frac{1}{(1+|\xi| t)^N} \, d\xi \leq \frac{C}{t} \left(1 - \frac{1}{(1+Rt)^{N-1}} \right) \leq \frac{C}{t}.$$

Si combinamos estas dos estimaciones, vemos que la norma $\|\Phi_t^\varphi(0)\|_{2,\frac{dt}{t}}$ es finita, lo que prueba la desigualdad (2.8).

Teorema 2.12 *Sea Φ una función par, $\Phi \in \mathcal{S}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \Phi = 1$ y sea $0 < p \leq 1$, existen constantes positivas C_1, C_2 tales que*

$$C_1(\|a\|_p + \| \sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a| \, \|_p) \leq \|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C_2(\|a\|_p + \| \sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a| \, \|_p). \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $a \in H^p(\mathbb{Z})$ y $\varphi \in \mathcal{S} \cap E_R$, $R < 1/2$, en las mismas condiciones del lema anterior. Definimos

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi(x-n).$$

Puesto que $a \in H^p(\mathbb{Z}) \subset l^p \subset l^1$, y tanto el núcleo de Poisson P como Φ son de $L^1(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para poder integrar término a término en la serie que define g y escribir que

$$(P_t * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)(P_t * \varphi)(x-n);$$

$$(\Phi_t * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)(\Phi_t * \varphi)(x-n).$$

De las hipótesis sobre φ y Φ y del hecho de que la sucesión $a \in l^1$ se deduce que ambas series convergen uniformemente y que representan funciones continuas, de aquí que las igualdades anteriores sean puntuales.

En particular, vemos que

$$(P_t * g)^d = (P_t^\varphi \star a);\ (\Phi_t * g)^d = (\Phi_t^\varphi \star a)^d. \tag{2.10}$$

Para ver la desigualdad izquierda de (2.9), basta ver que, para cierta constante $C > 0$,

$$\| \sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a|\ \|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}. \tag{2.11}$$

Para ello, si tomamos M en el lema anterior tal que $Mp > 1$

$$\| \sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a|\ \|_p \leq C(\| \sup_{t>0} |\Phi_t^\varphi \star a|\ \|_p + \|a\|_p).$$

Teniendo en cuenta (2.10), podemos aplicar el Lema 1.5 para obtener

$$\| \sup_{t>0} |\Phi_t^\varphi \star a|\ \|_p = \| \sup_{t>0} |\Phi_t * g|^d\ \|_p \leq C\| \sup_{t>0} |\Phi_t * g|\ \|_p.$$

Usamos ahora la equivalencia de todas las caracterizaciones maximales en $H^p(\mathbb{R})$ ([FS]) , análoga a la que queremos probar en $H^p(\mathbb{Z})$, y escribimos para cierta constante $C > 0$

$$\| \sup_{t>0} |\Phi_t * g|\ \|_p \leq C\| \sup_{t>0} |P_t * g|\ \|_p.$$

De nuevo, si aplicamos el Lema 1.6, (2.10) y el Lema 2.8, obtenemos que

$$\begin{aligned}\| \sup_{t>0} |P_t * g| \|_p &\leq C\|(\sup_{t>0} |P_t * g|)^d\|_p = C\| \sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a| \|_p \\ &\leq C(\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a|\|_p + \|a\|_p) = C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.\end{aligned}$$

Combinando las anteriores desigualdades, obtenemos (2.11).

Análogamente, se prueba la desigualdad derecha de (2.9). □

Una caracterización de $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de funciones de área continuas es la siguiente.

Definición 2.13 *Si $0 < p \leq 1$, definimos el espacio*

$$H^p_A(\mathbb{Z}) = \left\{ a \in l^p(\mathbb{Z}) \text{ tales que } \|(\Psi_t^d \star a)\|_{2, \frac{dt}{t}} \in l^p(\mathbb{Z}) \right\}$$

con la p-norma

$$\|a\|_{H^p_A(\mathbb{Z})} = \|a\|_p + \| \; \|\Psi_t^d \star a\|_{2, \frac{dt}{t}} \; \|_p;$$

donde $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que $\int_{\mathbb{R}} \Psi = 0$, $\Psi_t^d(0) = 0$, y

$$\| \; \|\Psi_t^d \star a\|_{2, \frac{dt}{t}} \; \|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^\infty \left| \sum_{m \neq 0} \Psi_t(m) a(n-m) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 2.14 *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $a \in H^p_A(\mathbb{Z})$ si y sólo si $a \in H^p(\mathbb{Z})$. Es más, se tiene que*

$$H^p_A(\mathbb{Z}) \sim H^p(\mathbb{Z}).$$

Demostración. Sea $a \in H^p_A(\mathbb{Z})$, y definamos $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n)\varphi(x-n)$, donde $\varphi \in \mathcal{S} \cap E_R, R < 1/2$ y verifica que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero.

Puesto que $a \in H^p_A(\mathbb{Z}) \subset l^p \subset l^1$ y $\varphi \in \mathcal{S}$, un razonamiento análogo al del Teorema 2.12, nos permite escribir, si P es el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}$ y Ψ es como en la Definición 2.13

$$(P_t * g)^d = (P_t^\varphi \star a); \; (\Psi_t * g)^d = (\Psi_t^\varphi \star a). \tag{2.12}$$

Para probar la inclusión continua $H^p_A(\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^p(\mathbb{Z})$ basta ver que, para C constante positiva,

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p \leq C\|a\|_{H^p_A(\mathbb{Z})}. \tag{2.13}$$

En efecto, si tomamos k_0 en el Lema 2.8 tal que $p \cdot k_0 > 1$

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \, \|_p \leq C(\| \sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a| \, \|_p + \|a\|_p)\cdot$$

Teniendo en cuenta (2.12), podemos aplicar el Lema 1.5 para obtener

$$\| \sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a| \, \|_p = \| \sup_{t>0} |(P_t * g)^d| \|_p \leq C \| \sup_{t>0} |P_t * g| \, \|_p\cdot$$

Usamos ahora la caracterización del espacio $H^p(\mathbb{R})$ en términos de funciones de área, y escribimos para cierta constante $C > 0$

$$\| \sup_{t>0} |P_t * g| \, \|_p \leq C \| \, \|\Psi_t * g\|_{2, \frac{dt}{t}} \, \|_p\cdot$$

Puesto que $g \in E_R$, $R < 1/2$ podemos aplicar el Lema 1.6, junto con (2.12) y el Lema 2.11, para obtener que

$$\begin{aligned} \| \, \|\Psi_t * g\|_{2, \frac{dt}{t}} \, \|_p &\leq C \| \, \|(\Psi_t * g)^d\|\|_{2, \frac{dt}{t}} \, \|_p = C \| \, \|\Psi_t^\varphi \star a\|_{2, \frac{dt}{t}} \, \|_p \\ &\leq C(\| \, \|\Psi_t^d \star a\|_{2, \frac{dt}{t}} \|_p + \|a\|_p) = C\|a\|_{H_A^p(\mathbb{Z})}\cdot \end{aligned}$$

Combinando las desigualdades anteriores, obtenemos (2.13).

Una demostración análoga nos permite probar que para cierta constante $C > 0$

$$\| \, \|\Psi_t^d \star a\|_{2, \frac{dt}{t}} \|_p \leq C(\|a\|_p + \| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p). \ \square$$

En [Su1], Q. Sun partiendo de una caracterización de $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de funciones de área discretas, establece una descomposición atómica de dichos espacios. A partir de nuestros resultados, podemos dar también la siguiente caracterización del espacio $H^p(\mathbb{Z})$ análoga a la de [Su1].

Definición 2.15 *Sea $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que sop $\hat{\Psi} \subset \{\xi;\ 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ y $|\hat{\Psi}(\xi)| \geq C > 0$ si $3/5 \leq |\xi| \leq 5/3$. Notamos por $\Psi_m^d = \{\Psi_{2^m}^d(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Si $0 < p \leq 1$, definimos el espacio

$$H_{Ad}^p(\mathbb{Z}) = \left\{ a \in l^p(\mathbb{Z});\ \left\| \left(\sum_{m\geq 0} |(\Psi_m^d \star a)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p < \infty \right\},$$

con la p-norma

$$\|a\|_{H_{Ad}^p(\mathbb{Z})} = \|a\|_p + \left\| \left(\sum_{m\geq 0} |(\Psi_m^d \star a)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

Mediante una demostración análoga a la del Teorema 2.14, podemos establecer la equivalencia de los espacios H^p_{Ad} con las caracterizaciones de $H^p(\mathbb{Z})$ dadas anteriormente.

Teorema 2.16 *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces, $a \in H^p_{Ad}(\mathbb{Z})$ si y sólo si $a \in H^p(\mathbb{Z})$. Además,*

$$H^p_{Ad}(\mathbb{Z}) \sim H^p(\mathbb{Z}).$$

Demostración. Para demostrar $H^p_{Ad}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^p(\mathbb{Z})$ basta ver que, para $a \in H^p_{Ad}(\mathbb{Z})$, existe una constante positiva C tal que

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \ \|_p \leq C\|a\|_{H^p_{Ad}(\mathbb{Z})}. \tag{2.14}$$

Para ello, al igual que en el Teorema 2.14, definimos la función

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi(x-n),$$

donde $\varphi \in \mathcal{S} \cap E_R, R < 1/2$ y verifica que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero.

Razonando como en dicho teorema y haciendo uso de la caracterización del espacio $H^p(\mathbb{R})$ en términos de funciones de área discreta tenemos que para una función Ψ, como en la Definición 2.15,

$$\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a|\|_p \leq C \left(\|a\|_p + \|(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\Psi_m * g|^2(x))^{1/2}\|_p \right).$$

Por otro lado, debido a que sop $\hat{\Psi} \subset \{\xi;\ 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$, se tiene que $\Psi_m * g \equiv 0$ para $m \leq -1$ y, por tanto, como consecuencia del Lema 1.8, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\Psi_m * g|^2 \right)^{1/2} \right\|_p &= \left\| \left(\sum_{m\geq 0} |\Psi_m * g|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ \leq\ C \left\| \left\{ \left(\sum_{m\geq 0} |\Psi_m * g|^2(n) \right)^{1/2} \right\}_n \right\|_p &= C \left\| \left(\sum_{m\geq 0} |\Psi_m^{\varphi} \star a|^2 \right)^{1/2} \right\|_p . \end{aligned}$$

Puesto que sop $\widehat{\Psi_m} \subset \{2^{-1-m} \leq |\xi| \leq 2^{1-m}\}$ y $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero, tenemos que $\Psi_m * \varphi = \Psi_m$ para m suficientemente grande, por lo que, como consecuencia del

Lema 2.11, podemos deducir a partir de la ecuación anterior que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}\left|\sum_{k\neq 0}\Psi_m^{\varphi}(k)a(n-k)\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p} \\
\leq\ & C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}\left|\sum_{k\neq 0}(\Psi_m^{\varphi}(k)-\Psi_m(k))a(n-k)\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p} \\
+\ & C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}\left|\sum_{k\neq 0}\Psi_m(k)a(n-k)\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p} \\
\leq\ & C\left(\|a\|_p+\left\|\left(\sum_{m\geq 0}|(\Psi_m^d\star a)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\right)=C\|a\|_{H_A^p(\mathbb{Z})}.
\end{aligned}$$

Combinando las estimaciones anteriores obtenemos (2.14). La prueba de $H^p(\mathbb{Z})\hookrightarrow H^p_{Ad}(\mathbb{Z})$ es análoga. □

2.4 Descomposición atómica de los espacios $H^p(\mathbb{Z})$

Como hemos citado anteriormente Q. Sun parte de una definición en términos de funciones de área para definir los espacios $H^p(\mathbb{Z})$. En el contexto más general de espacios de Triebel-Lizorkin, Q. Sun establece, en particular, en su artículo [Su1] que la combinación de trasladadas de una función ϕ localmente integrable con coeficientes en $H^p(\mathbb{Z})$ es una función de $H^p(\mathbb{R})$. El siguiente teorema recoge dicho resultado que será la base fundamental para la obtención de la descomposición atómica de los espacios $H^p(\mathbb{Z})$ a partir de una representación de este tipo para funciones de $H^p(\mathbb{R})$.

Teorema 2.17 *Sea $0<p\leq 1$ y $a\in H^p(\mathbb{Z})$. Si $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ con sop $\phi\subset\{|x|\leq N\}$, la función*

$$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a(n)\phi(x-n)\in H^p(\mathbb{R}),$$

y además, existe una constante $C=C(p)$ de forma que

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}\leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Demostración. Puesto que $a \in H^p(\mathbb{Z}) \subset l^1(\mathbb{Z})$ y $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, podemos deducir que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Por tanto, para probar el teorema, según el Teorema 2.1, basta estimar $\|f\|_p + \|Hf\|_p$. En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\ \phi(x-n)|^p\ dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p\ |\phi(x-n)|^p\ dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p \|\phi\|_p^p.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_p^p &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| H\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\phi(x-n)\right)\right|^p dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\phi(y-n)}{x-y}\ dy\right|^p dx \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-y}\left(\sum_{|n-m|\leq 2N} + \sum_{|n-m|>2N}\right)(a(n)\phi(y-n))\ dy\right|^p dx \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \sum_{|n-m|\leq 2N} a(n) \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(y-n)}{x-y}\ dy\right|^p dx \\
&+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{|n-m|>2N} a(n) \frac{\phi(y-n)}{x-y}\left(1-\frac{x-y}{m-n}\right)^{N_0} dy\right|^p dx \\
&+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{|n-m|>2N} a(n)\phi(y-n)\left(\sum_{k=1}^{N_0} \frac{(m-n-x+y)^{k-1}}{(m-n)^k}\right) dy\right|^p dx \\
&= \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)}.
\end{aligned}$$

Donde hemos denotado por N_0 a la parte entera de $1/p$ y hemos tenido en cuenta que

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-y}\left(1-(\frac{x-y}{m-n})\right)^{N_0} = \sum_{k=1}^{N_0} \frac{(m-n-x+y)^{k-1}}{(m-n)^k}.$$

Por ser $H\phi$ una función localmente integrable, podemos estimar (I) como

$$\text{(I)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \sum_{|n-m|\leq 2N} a(n) H\phi(x-n)\right|^p dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{|m-n|\leq 2N} |a(n)|^p \int_{m-n}^{m-n+1} |H\phi(x)|^p \, dx \\
&= C \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p \int_{-2N}^{2N+1} |H\phi(x)|^p \, dx \\
&= C\|a\|_p^p.
\end{aligned}$$

Para estimar (II), observamos que, sin restricción, podemos suponer $N \geq 2$ y, en este caso, si $|y-n| \leq N$, $m \leq x \leq m+1$ y $|m-n| > 2N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|m-n| &\leq |y-n| + |x-y| + |x-m| \leq N+1+|x-y| \\
&\leq \frac{3}{2}N + |x-y| \leq \frac{3}{4}|m-n| + |x-y|,
\end{aligned}$$

con lo cual, $|x-y| \geq \frac{1}{4}|m-n|$ y, por tanto,

$$\left| \frac{1}{x-y}\left(1-\frac{x-y}{m-n}\right)^{N_0} \right| = \frac{|m-n-x+y|^{N_0}}{|x-y||m-n|^{N_0}} \leq \frac{C}{|m-n|^{N_0+1}}.$$

De esta desigualdad, puesto que $(N_0+1)p > 1$, deducimos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{|n-m|>2N} a(n) \, \frac{\phi(y-n)}{x-y} \left(1-\frac{x-y}{m-n}\right)^{N_0} dy \right|^p dx \\
&\leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{|n-m|>2N} \frac{|a(n)|}{|m-n|^{N_0+1}} \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)| \, dy \right)^p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}^p.
\end{aligned}$$

Asimismo, podemos acotar (III) mediante la estimación

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{III}) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{|n-m|>2N} a(n)\phi(y-n) \left(\sum_{k=1}^{N_0} \frac{(m-n-x+y)^{k-1}}{(m-n)^k} \right) dy \right|^p dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \left| \sum_{|n-m|>2N} \frac{a(n)}{(m-n)^k} \int_{\mathbb{R}} \phi(y)(y+m-x)^{k-1} \, dy \right|^p dx \\
&= \sum_{k=1}^{N_0} \left(\int_0^1 \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(y)(y-x)^{k-1} \, dy \right|^p dx \right) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \sum_{|n-m|>2N} \frac{a(n)}{(m-n)^k} \right|^p \\
&\leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}^p.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad es consecuencia de la Proposición 2.5 observando que

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{|n-m|>2N}\frac{a(n)}{(m-n)^k}\right|^p &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\neq m}\frac{a(n)}{(m-n)^k}\right|^p+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{|n-m|\leq 2N,\ m\neq n}\frac{a(n)}{(m-n)^k}\right|^p\\ &\leq C\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z})}+C(N)\|a\|^p_p.\end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos que $\|Hf\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}$. Y podemos concluir que

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq C(\|f\|_p+\|Hf\|_p) \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \cdot \square$$

Observación. El teorema anterior se aplicará posteriormente al caso en que ϕ sea la función característica de un intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

Definición 2.18 *Sea $0 < p \leq 1$, diremos que la sucesión a es un H^p átomo en $\mathbb{Z}$, si verifica:*

(i) el soporte de a está contenido en una bola de $\mathbb{Z}$ con centro en un entero m_0 y de cardinal $2n+1$, $n \geq 1$.

(ii) $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{(2n+1)^{1/p}}$.

(iii) $\sum n^\alpha a(n) = 0$, para todo α entero positivo con la condición, $\alpha \leq p^{-1}-1$.

Definimos el espacio $H^p_{at}(\mathbb{Z})$ como el conjunto de sucesiones a que pueden escribirse en la forma

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \tag{2.15}$$

donde cada a_j es un H^p átomo y $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$. Para $a \in H^p_{at}(\mathbb{Z})$, definimos también la p-norma

$$\|a\|_{H^p_{at}(\mathbb{Z})} = \inf\left\{\left(\sum_j |\lambda_i|^p\right)^{1/p}\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de a de la forma (2.15).

Teorema 2.19 *Sea* $0 < p \leq 1$ *y* $a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \in H^p_{at}(\mathbb{Z})$*. Se verifica que* $a \in H^p(\mathbb{Z})$ *y existe una constante* $C > 0$*, independiente de* a*, de forma que*

$$\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

Demostración. Para la prueba del teorema basta ver que para todo H^p átomo a,

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C, \tag{2.16}$$

con constante C independiente de a, ya que si $a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \in H^p_{at}(\mathbb{Z})$

$$\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z})} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \|a_j\|^p_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

Tomamos, por tanto, a un H^p átomo con soporte en una bola de $\mathbb{Z}$, Q y denotamos por $\#Q$ al cardinal de Q y por m_0 a su centro.

Las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.18 implican que

$$\|a\|^p_p = \sum_{n \in Q} |a(n)|^p \leq \#Q \left(\frac{1}{\#Q^{1/p}} \right)^p = 1.$$

Por otro lado, para estimar $\|H^d a\|_p$ podemos escribir que

$$\sum_n |H^d a(n)|^p = \sum_{n \in 2Q} |H^d a(n)|^p + \sum_{n \notin 2Q} |H^d a(n)|^p = S_1 + S_2,$$

donde $2Q$ representa la bola de $\mathbb{Z}$ de centro m_0 y cardinal $(2\ \#Q) - 1$.

En el sumando S_1, utilizamos la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $2/p$, $2/(2-p)$ y el hecho de que el operador transformada discreta de Hilbert es acotado en l^2 para obtener que

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \in 2Q} |H^d a(n)|^p \leq (2\#Q)^{(2-p)/2} \|H^d a\|^p_2 \\ &\leq C(2\#Q)^{(2-p)/2} \|a\|^p_2 = C(2\#Q)^{(2-p)/2} (\sum_{n \in Q} |a(n)|^2)^{p/2} \\ &\leq C\#Q^{(2-p)/2} \#Q^{p/2} \frac{1}{\#Q} = C\cdot \end{aligned}$$

Para el sumando S_2, utilizamos la propiedad de cancelación para un p-átomo. Así, si M_0 representa a la parte entera de $1/p$, para cada $n \notin 2Q$ se tiene que

$$\begin{aligned} |H^d a(n)| &= \left| \sum_{m \in Q} \frac{a(m)}{n-m} \right| = \left| \sum_{m \in Q} a(m) \left(\frac{1}{n-m} - \sum_{k=1}^{M_0} \frac{(m-m_0)^{k-1}}{(n-m_0)^k} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{m \in Q} a(m) \frac{(m-m_0)^{M_0}}{(n-m)(n-m_0)^{M_0}} \right| \le C\|a\|_\infty \left(\sum_{m \in Q} \frac{|m-m_0|^{M_0}}{|n-m_0|^{M_0+1}} \right) \\ &\le C \frac{1}{\#Q^{1/p}} \left(\frac{\#Q}{|n-m_0|} \right)^{M_0+1}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que si $m \in Q$ y $n \notin 2Q$, $|n-m| \ge |n-m_0|/2\cdot$

Antes de estimar S_2, observamos que si $n \notin 2Q$, $|n-m_0| \ge \#Q$. Por tanto, si notamos por $k = n - m_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n \notin 2Q} \frac{1}{|n-m_0|^{(M_0+1)p}} &\le \sum_{|k| \ge \#Q} \frac{1}{|k|^{(M_0+1)p}} \le C \int_{|x| \ge \#Q} \frac{1}{|x|^{(M_0+1)p}}\, dx \\ &= \frac{C}{\#Q^{(M_0+1)p-1}}. \end{aligned}$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n \notin 2Q} |H^d a(n)|^p \le \frac{C}{\#Q} \sum_{n \notin 2Q} \frac{\#Q^{(M_0+1)p}}{|n-m_0|^{(M_0+1)p}} \\ &\le C\#Q^{(M_0+1)p-1} \frac{1}{\#Q^{(M_0+1)p-1}} = C. \end{aligned}$$

Las estimaciones anteriores dan como resultado (2.16). □

El recíproco del Teorema 2.19 se probará utilizando la descomposición atómica de los espacios $H^p(\mathbb{R})$. Antes recordaremos algunos puntos interesantes de dicha descomposición.

De forma análoga al caso $\mathbb{Z}$, para $0 < p \le 1$, un H^p átomo en $\mathbb{R}$ es una función b con soporte contenido en un intervalo I satisfaciendo

(i) una condición de tamaño: $\|b\|_\infty \le \dfrac{1}{|I|^{1/p}}$,

(ii) una condición de cancelación: $\displaystyle\int_I x^k b(x)\, dx = 0$, para todo entero $0 \le k \le [1/p] - 1$, donde $[1/p]$ representa el mayor entero $\le 1/p$.

El siguiente teorema nos proporciona la descomposición atómica para funciones $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap H^p(\mathbb{R})$.

Teorema 2.20 ([Cf], [L], [MS], [W]) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap H^p(\mathbb{R})$ con $0 < p \leq 1$. Entonces existe:

(a) una sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ de p-átomos y

(b) una sucesión $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ de números reales satisfaciendo

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}^p,$$

tal que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \; a_i(x)$, para casi todo punto $x \in \mathbb{R}$, y con convergencia de la serie hacia f en el espacio $H^p(\mathbb{R})$.

Observación. La descomposición anterior puede obtenerse a través de la caracterización grand-maximal del espacio $H^p(\mathbb{R})$ (ver [Cf], para una demostración más detallada ver [GR]). Ésta consiste en considerar, para M entero positivo, el operador maximal asociado a una función $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$S_M^*(f)(x) = \sup \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi(t) \; dt \right|}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(u)| \; du + |I_\Psi|^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi^{(M+1)}(u)| \; du}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $\Psi \in C^\infty$, con soporte compacto contenido en un intervalo I_Ψ y tales que $\text{dist}(x, I_\Psi) < |I_\Psi|$.

Es conocido ([FS]) que si $M > 1/p$, existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq \|S_M^*(f)\|_p \leq C_2 \|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

Sean $I_i(k)$ las componentes conexas del abierto $\{x \in \mathbb{R} : S_M^*(f)(x) > 2^k\}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, y $(\phi_j^i)_{j \geq 0}$ una partición de la unidad asociada a cada intervalo $I_i(k)$ de forma que $\sum_j \phi_j^i = \chi_{I_i(k)}$. Definimos, si $N = [1/p] - 1$,

$$b_k^i(x) = \sum_j (f(x) - P_j^i(x)) \phi_j^i(x)$$

con

$$P_j^i(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\ \xi_k(s)\ \phi_j^i(s)\ ds \right) \xi_k(x)$$

donde $(\xi_k)_k$ es una base ortonormal del subespacio generado por $\{1, x, \cdots, x^N\}$ en $L^2(\phi_j^i(x)\ dx)$.

De esta forma, obtenemos la representación

$$f(x) = \sum_k \sum_i \beta_k^i(x)$$

donde

$$\beta_k^i(x) = b_k^i(x) - \sum_{\{j: I_j(k+1) \subset I_i(k)\}} b_{k+1}^j(x).$$

Los p-átomos a_k^i asociados a la función f se obtienen de la descomposición anterior como

$$a_k^i(x) = (C 2^k |I_i(k)|^{1/p})^{-1} \beta_k^i(x).$$

Claramente, cada a_k^i es un p-átomo con sop $a_k^i \subset I_i(k)$. Notamos que sop $\phi_j^i \subset I_i(k)$ para todo $j \geq 0$ y, en consecuencia, si $I_i(k) \cap$ sop $f = \emptyset$, $P_j^i \equiv 0$ con lo que, $b_k^i \equiv 0$, $\beta_k^i \equiv 0$ y $a_k^i \equiv 0$.

De aquí que, de cara a obtener la descomposición atómica, podamos restringirnos a considerar átomos soportados en intervalos $I_i(k)$ que corten al soporte de f.

A continuación introducimos unas funciones auxiliares, B_k (splines de orden $k-1$, $k \geq 1$), cuyas propiedades nos permitirán obtener la descomposición en $p-$átomos de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z})$.

Lema 2.21 *Sea* $B_1(x) = \chi_{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$, *y*

$$B_k(x) = \left(\chi_{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]} * \overset{k-1}{\cdots} * \chi_{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]} \right)(x), \ k \geq 2.$$

Entonces, para todo $j \geq 0$ *y todo* $l \geq 1$ *enteros,*

$$D^j B_{j+l} = \Delta^j B_l, \tag{2.17}$$

donde D^j *denota al operador derivada j-ésima y* Δ^j *el operador diferencia j-ésima, siendo*

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f\left(x - \frac{1}{2}\right), \ \Delta^0 = Id.$$

Observación. *Puesto que $B_k \in C^{k-2}(\mathbb{R})$ y $D^{k-1}B_k$ no tiene por que existir en todo punto, si $l = 1$ la igualdad (2.17) se entiende que es válida solamente en el caso de existencia de $D^j B_{j+1}$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el natural l. En el caso $l = 1$, hemos de probar que para todo $j \geq 0$,

$$D^j B_{j+1} = \Delta^j B_1. \tag{2.18}$$

Si $j = 0$ no hay nada que probar. Si $j = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} DB_2(x) &= \frac{d}{dx}\left((1-|x|)\chi_{[-1,1]}\right)(x) = \chi_{[-1,0]}(x) - \chi_{[0,1]}(x) \\ &= \Delta B_1(x). \end{aligned}$$

Supongamos que (2.18) se verifica para $j-1$, y veámoslo para j,

$$\begin{aligned} D^j B_{j+1} &= D^j(B_j * B_1) = D(D^{j-1}B_j * B_1) = D(\Delta^{j-1}B_1 * B_1) \\ &= \Delta^{j-1}(DB_2) = \Delta^{j-1}(\Delta B_1) = \Delta^j B_1. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el lema probado para $l-1$, veamos que es válido para l,

$$D^j B_{j+l} = D^j(B_{j+l-1} * B_1) = (D^j B_{j+l-1} * B_1) = (\Delta^j B_{l-1} * B_1) = \Delta^j B_l. \quad \square$$

Lema 2.22 *Si k es par, B_k es un polinomio de grado $k-1$ sobre intervalos de la forma $[m, m+1]$ con m entero, y si k es impar B_k coincide con un polinomio de grado $k-1$ en cada intervalo de la forma $[m-1/2, m+1/2]$ con m entero.*

Demostración. Si $k = 1$, $B_1(x) = \chi_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$, con lo cual el lema es obvio en este caso.

Si k es par, supongamos por hipótesis de inducción el lema demostrado para el impar $k-1$. Sean, por tanto, $P_{k-2,m}$ y $P_{k-2,m-1}$ los respectivos polinomios de grado $k-2$ a los que es igual la función B_{k-1} sobre los intervalos $[m-1/2, m+1/2]$ y $[m-3/2, m-1/2]$, para cada m entero.

Si $x \in (m, m+1)$, tenemos, debido al lema anterior, que

$$\begin{aligned} DB_k(x) &= B_{k-1}(x+1/2) - B_{k-1}(x-1/2) = P_{k-2,m}(x+1/2) - P_{k-2,m-1}(x-1/2) \\ &= Q_{k-2,m}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que DB_k es un polinomio de grado $k-2$, $Q_{k-2,m}$, sobre cada intervalo de la forma $(m, m+1)$. En consecuencia, si $m \in \mathbb{Z}$

$$B_k(x) = P_{k-1,m}(x), \text{ si } x \in (m, m+1).$$

Puesto que B_k es una función continua si $k \geq 2$, la igualdad anterior puede extenderse a los extremos del intervalo.

La demostración en el caso k impar es análoga. □

Proposición 2.23 *Sean las funciones B_k como en el Lema 2.21. Si $P_{j,k}$ representa un polinomio de grado j, se verifica que si* $0 \leq j \leq k-1$,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j B_k(y-m) = P_{j,k}(y).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre el entero k. Claramente

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} B_1(y-m) \equiv 1.$$

Consideremos la proposición cierta para el entero $k-1$, con lo cual

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j B_{k-1}(y-m) = P_{j,k-1}(y), \quad \text{si } 0 \leq j \leq k-2.$$

Por tanto, para $0 \leq j \leq k-2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j B_k(y-m) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j (B_{k-1} * B_1)(y-m) = (P_{j,k-1} * B_1)(y) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} P_{j,k-1}(y-x)\, dx = P_{j+1,k-1}(y+1/2) - P_{j+1,k-1}(y-1/2) \\
&= P_{j,k}(y),
\end{aligned}$$

donde $P_{j+1,k-1}$ es un polinomio de grado $j+1$ tal que $(P_{j+1,k-1})' = P_{j,k-1}$.

Si $j = k-1$, consideramos

$$f(y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^{k-1} B_k(y-m).$$

Puesto que, según el lema anterior, si k es par B_k es infinitamente derivable en intervalos de la forma $(n, n+1)$ y, si k es impar, en intervalos de la forma $(n-1/2, n+1/2)$ con

n entero, el Lema 2.21 nos permite calcular la derivada de orden $k-1$ de f, para y en estos intervalos, como

$$\begin{aligned}(D^{k-1}f)(y) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^{k-1}D^{k-1}B_k(y-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^{k-1}\Delta^{k-1}B_1(y-m)\\ &= \Delta^{k-1}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^{k-1}B_1(y-m)\right) = \Delta^{k-1}\left([y+1/2]^{k-1}\right) = C.\end{aligned}$$

Donde C denota a una constante independiente de n. En consecuencia, si $P_{k-2,n}$ representa a un polinomio de grado $k-2$, obtenemos que para cada $y \in (n, n+1)$ si k es par, o cada $y \in (n-1/2, n+1/2)$ si k es impar

$$f(y) = C\frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + P_{k-2,n}(y).$$

Del hecho que $B_k \in C^{k-2}(\mathbb{R})$, $f \in C^{k-2}(\mathbb{R})$, y de aquí que el polinomio $P_{k-2,n}$ sea independiente de n. En consecuencia, para todo $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = C\frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + P_{k-2}(y) = P_{k-1,k}(y). \quad \square$$

Lema 2.24 *Sea $k \geq 1$, un entero y $a \in H^p(\mathbb{Z})$ con $0 < p \leq \frac{1}{k}$. Consideramos, si k es par,*

$$c_k(m) = \sum_{j=1+\left[\frac{-2k-1}{4}\right]}^{\left[\frac{2k-3}{4}\right]} a(m-j)\lambda_k(j), \ m \in \mathbb{Z},$$

donde $\lambda_k(j) = \displaystyle\int_{j+1/4}^{j+3/4} B_k(y)\ dy$, $j \in \mathbb{Z}$. Y si k impar, consideramos la sucesión,

$$c_k(m) = \sum_{j=1+\left[\frac{-2k+1}{4}\right]}^{\left[\frac{2k-1}{4}\right]} a(m-j)\lambda_k(j), \ m \in \mathbb{Z},$$

donde $\lambda_k(j) = \displaystyle\int_{j-1/4}^{j+1/4} B_k(y)\ dy$, $j \in \mathbb{Z}$.

Entonces,

$$c_k(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_{i,k}(m),$$

donde $\{\lambda_i\}_i \in l^p(\mathbb{Z})$ y las sucesiones $a_{i,k}$ verifican las siguientes condiciones:

- *Existe B_i, bola de $\mathbb{Z}$, tal que sop $a_{i,k} \subseteq B_i$.*
- $\|a_{i,k}\|_\infty \leq \dfrac{1}{(\#B_i)^{1/p}}$.
- $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j\ a_{i,k}(m) = 0,\ 0 \leq j \leq k-1.$

Además, existe una constante $C > 0$, independiente de a, tal que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Observación. *Notamos que si $k = [1/p]$, cada $a_{i,k}$ es un H^p-átomo en $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos k impar. A partir de $a \in H^p(\mathbb{Z})$, definimos

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\chi_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})}(x-n).$$

Como consecuencia del Teorema 2.17, $f \in H^p(\mathbb{R})$ y además

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}. \tag{2.19}$$

Puesto que $f \in H^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, podemos utilizar la descomposición atómica de estos espacios y escribir

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(x),\ \text{para casi todo punto } x \in \mathbb{R}, \tag{2.20}$$

donde $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)}$, y cada b_i es un H^p-átomo en $\mathbb{R}$. Además, como hemos hecho notar en el Teorema 2.20, la serie converge hacia f en $H^p(\mathbb{R})$ y, por tanto, también en el sentido de las distribuciones temperadas ([GR], pág. 236).

Si I_i es el mínimo intervalo que contiene el soporte de un átomo b_i, denotamos por

$$J_1 = \{i \in \mathbb{N};\ |I_i| > 1/8\} \quad \text{y} \quad J_2 = \{i \in \mathbb{N};\ |I_i| \leq 1/8\}.$$

En el caso $i \in J_1$, tenemos que

$$\|b_i\|_\infty \leq \frac{1}{|I_i|^{1/p}} \leq 8^{1/p},$$

y $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty} \in l^p(\mathbb{Z}) \subset l^1(\mathbb{Z})$, la serie $\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(y)$ converge a.e. $x \in \mathbb{R}$ y en el sentido de las distribuciones hacia una función $g \in L^2(\mathbb{R})$. Por esta razón, tiene sentido considerar la serie $\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y)$ que es, por tanto, convergente en casi todo punto y en $\mathcal{S}'$ hacia la función $f - g \in L^2(\mathbb{R})$.

En consecuencia, por (2.20), tenemos que, para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
(f * B_k)(m) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(\cdot)\right) * B_k\right](m) = \int_{-k/2}^{k/2} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ B_k(y)\ dy \\
&= \int_{-k/2}^{k/2} \left(\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ B_k(y)\ dy \qquad (2.21)\\
&+ \int_{-k/2}^{k/2} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ B_k(y)\ dy\cdot \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

En (2.21) podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y escribir

$$\int_{-k/2}^{k/2} \left(\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ B_k(y)\ dy = \sum_{i\in J_1} \lambda_i\ (b_i * B_k)(m).$$

Veamos que el sumando (2.22) es igual a 0. Como hemos hecho notar en la observación del Teorema 2.20, podemos reducirnos, en la descomposición atómica para funciones de $H^p(\mathbb{R})$, al caso de átomos b_i tales que sop $b_i \cap$ sop $f \neq \emptyset$. Por tanto, si $i \in J_2$ y l es cualquier entero, o bien sop $b_i \subset [l - 3/8, l + 3/8]$, o bien se verifica que sop $b_i \cap [l - 1/2, l + 1/2] = \emptyset$. Por ello, para todo $l \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y) = 0, \quad \text{a.e. } y \in (l - 1/2, l - 3/8) \cup (l + 3/8, l + 1/2). \qquad (2.23)$$

De lo cual se deduce,

$$\begin{aligned}
&\int_{m-k/2}^{m+k/2} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y)\right)\ B_k(m-y)\ dy \\
&= \sum_{0\le|j|\le(k-1)/2} \int_{m+j-1/2}^{m+j+1/2} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)\right)\ B_k(m-y)\ dy \\
&= \sum_{0\le|j|\le(k-1)/2} \int_{m+j-3/8}^{m+j+3/8} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)\right)\ B_k(m-y)\ dy.
\end{aligned}$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq |j| \leq \frac{k-1}{2}$, consideramos $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con sop $\varphi_j \subseteq [m+j-1/2, m+j+1/2]$ y $\varphi_j \equiv 1$ en $[m+j-3/8, m+j+3/8]$. De esta manera, como consecuencia de (2.23), escribimos la última ecuación como

$$\sum_{0\leq|j|\leq(k-1)/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y) \right) \ \varphi_j(y)\ B_k(m-y)\ dy \right).$$

Puesto que, según el Lema 2.22, B_k es igual a un polinomio de grado $k-1$ sobre el soporte de φ_j, la función $\varphi_j(\cdot)B_k(m-\cdot)$ es de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. De aquí que podamos usar la convergencia de la serie $\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y escribir la ecuación anterior como

$$\sum_{0\leq|j|\leq(k-1)/2} \sum_{i\in J_2} \lambda_i \ < b_i(\cdot),\ B_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) > \cdot$$

Como hemos notado anteriormente, para cada $i \in J_2$, o bien el soporte de b_i es disjunto con el de la función $B_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot)$, con lo cual

$$< b_i(\cdot),\ B_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) >= 0,$$

o bien sop $b_i \subset (m+j-3/8, m+j+3/8)$, en cuyo caso

$$< b_i(\cdot),\ B_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) >=< b_i(\cdot),\ B_k(m-\cdot) >= 0,$$

debido a que B_k es un polinomio de grado $k-1$ sobre el sop b_i, y a que b_i tiene momentos nulos hasta orden $k-1$. En consecuencia, hemos probado que

$$\int_{-k/2}^{k/2} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(m-y) \right)\ B_k(y)\ dy = 0.$$

Por tanto, para cada $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (2.24)\quad c_k(m) &= \sum_{j=1+\left[\frac{-2k+1}{4}\right]}^{\left[\frac{2k-1}{4}\right]} a(m-j)\lambda_k(j) = (f * B_k)(m) = \sum_{i\in J_1} \lambda_i (b_i * B_k)(m) \\ &= \sum_{i\in J_1} \lambda_i\ a_{i,k}(m). \end{aligned}$$

Veamos que las sucesiones $a_{i,k} = \{(b_i * B_k)(m)\}_m$ nos proporcionan la descomposición propuesta en el lema. Por lo razonado anteriormente, en (2.24) intervienen exclusivamente átomos soportados en intervalos I_i tales que $|I_i| > 1/8$, por tanto:

- sop $a_{i,k} \subseteq$ sop $(b_i * B_k) \cap \mathbb{Z} \subseteq (I_i + [-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}]) \cap \mathbb{Z} \subseteq B_{i,k}$ con $B_{i,k}$ bola de $\mathbb{Z}$.
- $\|a_{i,k}\|_\infty \leq \|b_i\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |B_k(x)|\ dx \leq \dfrac{C(k)}{|I_i|^{1/p}} \leq \dfrac{C(k,p)}{(\#B_{i,k})^{1/p}}$.
- Si $0 \leq j \leq k-1$, usamos la Proposición 2.23 y la propiedad de cancelación de los átomos b_i para polinomios de grado menor o igual que $[1/p]-1$ y obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j\ a_{i,k}(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j (b_i * B_k)(m) \\ = & \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j \int_{\mathbb{R}} b_i(y)\ B_k(m-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} b_i(y)\ P_{j,k}(y)\ dy = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba la descomposición

$$c_k(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_{i,k}(m).$$

Además, de (2.19), se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R})} \leq C\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Si k es par, la demostración es análoga tomando la función

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\ \chi_{[1/4,\ 3/4]}(x-n),$$

y $a \in H^p(\mathbb{Z})$. $\square$

Teorema 2.25 *Sean $k \geq 1$ un entero y $a \in H^p(\mathbb{Z})$ tal que $0 < p \leq \frac{1}{k}$. Entonces a admite la descomposición*

$$a(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_{i,k}(n),$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ y las sucesiones $\{a_{i,k}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ verifican que

- *Existe $B_{i,k}$, bola de $\mathbb{Z}$, tal que sop $a_{i,k} \subseteq B_{i,k}$.*
- $\|a_{i,k}\|_\infty \leq \dfrac{1}{(\#B_{i,k})^{1/p}}$.

- $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j\ a_{i,k}(m) = 0,\ 0 \le j \le k-1.$

Además, existe una constante $C > 0$, independiente de a tal que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \le C\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Demostración. Si procedemos por inducción sobre el natural k, observamos que si $k = 1$, el Lema 2.24 es equivalente al Teorema 2.25.

Supongamos, por tanto, el teorema cierto para el entero $k-1$, veámoslo para el entero k.

Por hipótesis de inducción, tenemos que si $a \in H^p(\mathbb{Z})$ para $0 < p \le \frac{1}{k} < \frac{1}{k-1}$,

$$a(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i\ a_{i,k-1}(m),$$

donde $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} |\mu_i|^p < \infty$, y cada $a_{i,k-1}$ verifica que

- Existe $B_{i,k-1}$, bola de $\mathbb{Z}$, tal que sop $a_{i,k-1} \subseteq B_{i,k-1}$.

- $\|a_{i,k-1}\|_\infty \le \dfrac{1}{(\#B_{i,k-1})^{1/p}}.$

- $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^j\ a_{i,k-1}(m) = 0,\ 0 \le j \le k-2.$

Por tanto tenemos que para todo entero j,

$$a(m+j) - a(m+j-1) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i\ \left(a_{i,k-1}(m+j) - a_{i,k-1}(m+j-1)\right).$$

Las sucesiones $c^j_{i,k-1} = \{a_{i,k-1}(m+j) - a_{i,k-1}(m+j-1)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, verifican que

- Existe una bola de $\mathbb{Z}$, $B^j_{i,k-1}$, tal que sop $c^j_{i,k-1} \subseteq B^j_{i,k-1}$.

- $\|c^j_{i,k-1}\|_\infty \le 2\|a_{i,k-1}\|_\infty \le \dfrac{2}{(\#B_{i,k-1})^{1/p}} \le \dfrac{C}{(\#B^j_{i,k-1})^{1/p}}.$

- Si $0 \leq l \leq k-1$,

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^l\ c^j_{i,k-1}(m) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} m^l\ \left(a_{i,k-1}(m+j) - a_{i,k-1}(m+j-1)\right)\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[(m-j)^l - (m-j+1)^l\right]\ a_{i,k-1}(m) = 0.\end{aligned}$$

Esto prueba que si $a \in H^p(\mathbb{Z})$, para todo entero j, $\{a(m+j) - a(m+j-1)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ admite una descomposición atómica como la enunciada. Por otro lado, el Lema 2.24 implica que la siguiente sucesión formada por la combinación lineal finita de trasladadas de a,

$$c_k(m) = \sum_j \lambda_k(j)\ a(m-j),$$

con $\lambda_k(j) > 0$, admite el mismo tipo de descomposición. De donde obtenemos la descomposición para la sucesión a. $\square$

Notamos que si en el teorema anterior tomamos $k = [1/p]$, $a_{i,k}$ son H^p átomos en $\mathbb{Z}$, con lo cual obtenemos el recíproco del Teorema 2.19 o, equivalentemente, la inclusión continua $H^p(\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^p_{at}(\mathbb{Z})$ que enunciamos en forma de teorema a continuación.

Teorema 2.26 *Sean $0 < p \leq 1$ y $a \in H^p(\mathbb{Z})$. Existe una sucesión $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ y una colección de H^p átomos en $\mathbb{Z}$, $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, de forma que*

$$a(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_i(n),\ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Además, existe una constante $C > 0$, independiente de la sucesión a, de manera que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p\right)^{1/p} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

El siguiente teorema, en cierto modo implícito en el anterior, muestra cómo *truncando* una función de $H^1(\mathbb{R})$ podemos obtener una sucesión de $H^1(\mathbb{Z})$.

Teorema 2.27 *Si $f \in H^1(\mathbb{R})$, la sucesión $a = \left\{\int_n^{n+1} f(x)\ dx\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H^1(\mathbb{Z})$, y existe $C > 0$ independiente de f tal que*

$$\|a\|_{H^1(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Demostración. Vamos a probar que a admite una descomposición atómica.

Por ser $f \in H^1(\mathbb{R})$ podemos escribir, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \; b_i(x),$$

con la condición $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$ y donde, para cada $i \geq 0$, b_i es un H^1 átomo en $\mathbb{R}$.

Al igual que en la demostración del Lema 2.24, usando esta vez la convergencia en $H^1(\mathbb{R})$ y por tanto en $L^1(\mathbb{R})$ de la representación atómica, obtenemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a(n) = \int_n^{n+1} f(x) \; dx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_n^{n+1} b_i(x) \; dx = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \; a_i(n).$$

Al igual que en el citado lema, se prueba que, para cada $i \geq 0$, $a_i = \left\{ \int_n^{n+1} b_i(x) \; dx \right\}_n$ son H^1 átomos en $\mathbb{Z}$. Por los Teoremas 2.19 y 2.20, concluímos que

$$\|a\|_{H^1(\mathbb{Z})} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| \leq C \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}. \square$$

Observación. El resultado análogo para $p < 1$ deja de ser cierto, incluso para funciones de $H^p(\mathbb{R})$ que son localmente integrables.

En efecto, definimos la función

$$a_{\epsilon,p}(x) = \begin{cases} 1/\epsilon^{1/p} & \text{si } 0 \leq x \leq \epsilon/2 \\ -1/\epsilon^{1/p} & \text{si } -\epsilon/2 \leq x < 0. \end{cases}$$

$a_{\epsilon,p}$ es un H^p átomo en $\mathbb{R}$ para $1/2 < p \leq 1$, por tanto, $\|a\|_{H^p(\mathbb{R})} \leq C$ uniformemente en $\epsilon > 0$.

En cambio, la sucesión $\{\tilde{a}_{\epsilon,p}(n)\}_n = \left\{ \int_n^{n+1} a_{\epsilon,p}(x) \; dx \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es tal que $\tilde{a}_{\epsilon,p}(0) = \dfrac{1}{2\epsilon^{(1-p)/p}}$, $\tilde{a}_{\epsilon,p}(-1) = -\dfrac{1}{2\epsilon^{(1-p)/p}}$, $\tilde{a}_{\epsilon,p}(n) = 0$, si $n \neq -1, 0$ y su norma l^p verifica

$$\|\tilde{a}_{\epsilon,p}\|_p = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{(1-p)/p} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \infty,$$

si $p < 1$.

2.5 Una caracterización grand-maximal de $H^p(\mathbb{Z})$

En [MS], R.A. Macías y C. Segovia prueban una descomposición atómica para ciertas distribuciones definidas en espacios de tipo homogéneo de los cuales $\mathbb{Z}$ es un caso particular.

Denotamos por $\mathrm{Lip}(\alpha)$, $0 < \alpha < \infty$, al conjunto de sucesiones ϕ tales que existe una constante C con la condición

$$|\phi(n) - \phi(m)| \leq C|n-m|^\alpha,$$

para todo n y $m \in \mathbb{Z}$. Representaremos por $\|\phi\|_\alpha$ a la mínima de las constantes C para las cuales se satisface la desigualdad anterior.

Si $0 < \alpha < 1$, diremos que una sucesión finita ϕ pertenece a $T_\alpha(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, si su soporte está incluido en $B(m,r) = \{n \in \mathbb{Z};\ |n-m| < r\}$, donde $r \geq 1$ y

$$\|\phi\|_\infty \leq \frac{1}{r}, \quad \|\phi\|_\alpha \leq \frac{1}{r^{1+\alpha}}.$$

Por último, para cualquier sucesión a definimos la siguiente función maximal

$$a_\alpha^*(m) = \sup\left\{\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\phi(n)\right|;\ \phi \in T_\alpha(m)\right\}.$$

El principal resultado de Macías y Segovia en [MS], particularizado al espacio $\mathbb{Z}$, es el siguiente.

Teorema 2.28 *Sea a una sucesión tal que para cierto α, $0 < \alpha < 1$, y $1/2 < p \leq 1$, la función maximal a_α^* pertenece a $l^p(\mathbb{Z})$. Entonces, existe una sucesión de p-átomos en $\mathbb{Z}$, $\{a_i\}_{i=0}^\infty$, y una sucesión numérica $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$, tales que*

$$a = \sum_{i=0}^\infty \lambda_i a_i.$$

Además, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 dependientes de p tales que

$$C_1\|a_\alpha^*\|_p \leq \|a\|_{H^p_{at}(\mathbb{Z})} \leq C_2\|a_\alpha^*\|_p.$$

Puesto que en los Teoremas 2.19 y 2.26 ha sido probada la equivalencia de la representación atómica de $H^p(\mathbb{Z})$ con el resto de caracterizaciones maximales, el Teorema 2.28 proporciona una caracterización grand-maximal de $H^p(\mathbb{Z})$ en el rango $1/2 < p \leq 1$.

También podemos usar el Teorema 2.28 y otras definiciones en términos de funciones maximales de los espacios $H^p(\mathbb{Z})$ para establecer una nueva caracterización grand-maximal de los espacios de Hardy discretos.

Definimos el conjunto

$$\mathcal{M} = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R});\ \ \text{sop}\ \varphi \subset \{|y| \leq 1\},\ \ \|\varphi\|_\infty \leq 1,\ \ \|\varphi'\|_\infty \leq 1\}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{M}$ denotamos, como es habitual, por $\{\varphi_t^d(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a la sucesión definida por $\varphi_t^d(n) = \frac{1}{t}\varphi(\frac{n}{t})$ si $n \neq 0$, $\varphi_t^d(0) = 0$. Observamos que $\{\varphi_t^d(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \equiv 0$, si $0 < t < 1$.

Introducimos, asimismo, la siguiente función maximal asociada a una sucesión a

$$a^{*\mathcal{M}}(n) = \sup_{\varphi\in\mathcal{M}} \sup_{t\geq 1} |\varphi_t^d \star a|(n).$$

Teorema 2.29 *Si $1/2 < p \leq 1$, existen dos constantes positivas C_1 y C_2 dependientes de p tales que*

$$C_1\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_p + \|a^{*\mathcal{M}}\|_p \leq C_2\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Demostración.

Para cada $n_0 \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathcal{M}$ y $t \geq 1$, definimos

$$\phi = \{\varphi_t(n_0 - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Claramente, sop $\phi \subset B(n_0, t)$ y $\|\phi\|_\infty \leq \|\varphi_t\|_\infty \leq \frac{1}{t}$.

También, de las hipótesis sobre φ, se tiene que si $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in \text{Lip}(\alpha)$. En efecto, si $|x - y| < 2$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|\varphi'\|_\infty |x - y| \leq |x - y| = |x - y|^{1-\alpha}|x - y|^\alpha \leq 2^{1-\alpha}|x - y|^\alpha.$$

Si $|x - y| \geq 2$, y $x \in$ sop φ,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1 < |x - y|^\alpha.$$

Por tanto, para $0 < \alpha < 1$, $\|\varphi\|_\alpha \leq 2$.

Este hecho nos permite probar que $\|\phi\|_\alpha \leq \frac{2}{t^{1+\alpha}}$, ya que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$ diferentes,

$$|\phi(n) - \phi(m)| = \frac{1}{t}\left|\varphi\left(\frac{n_0 - n}{t}\right) - \varphi\left(\frac{n_0 - m}{t}\right)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\alpha}{t}\frac{|n - m|^\alpha}{t^\alpha} \leq \frac{2|n - m|^\alpha}{t^{1+\alpha}}.$$

Con lo cual hemos probado que $\phi \in T_\alpha(n_0)$.

Por ser $\phi \in T_\alpha(n_0)$, se verifica la desigualdad

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\sup_{t\geq 1}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi_t(n_0-n)\right| \leq \sup_{\phi\in T_\alpha(n_0)}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\phi(n)\right| = a^*_\alpha(n_0),$$

la cual implica que

$$\begin{aligned}
a^{*\mathcal{M}}(n_0) &= \sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\sup_{t\geq 1}\left|\sum_{n\neq n_0} a(n)\varphi_t(n_0-n)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\sup_{t\geq 1}\left|\sum_{n\neq n_0} a(n)\varphi_t(n_0-n) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi_t(n_0-n)\right| \\
&+ \sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\sup_{t\geq 1}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi_t(n_0-n)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi\in\mathcal{M}}\sup_{t\geq 1}\frac{1}{t}|a(n_0)\varphi(0)| + a^*_\alpha(n_0) \leq |a(n_0)| + a^*_\alpha(n_0).
\end{aligned}$$

Por tanto, deducimos que

$$\|a^{*\mathcal{M}}\|_p \leq \|a\|_p + \|a^*_\alpha\|_p.$$

Ahora bien, claramente, para toda $\varphi \in \mathcal{M}$, se verifica

$$\|\sup_{t>0}|\varphi^d_t \star a|\|_p \leq \|a^{*\mathcal{M}}\|_p.$$

Por otro lado, en el Teorema 2.12, probamos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C(\|a\|_p + \|\sup_{t>0}|\varphi^d_t \star a|\ \|_p).$$

Estas observaciones, junto con el Teorema 2.28, dan como consecuencia que, para cierta constante positiva C, si $1/2 < p \leq 1$,

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C(\|a\|_p + \|a^{*\mathcal{M}}\|_p) \leq C(\|a\|_p + \|a^*_\alpha\|_p) \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z})}. \ \Box$$

A. Uchiyama, en [U], establece un resultado análogo al del teorema anterior para espacios de tipo homogéneo con ciertas restricciones. Estas excluyen el caso en que los puntos del espacio tengan medida estrictamente positiva. Por esta razón, el Teorema 2.29 es una extensión de dicho resultado al caso particular $\mathbb{Z}$.

Capítulo 3

Relaciones entre los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ y $H^p(\mathbb{Z}^N)$

En el primer capítulo se presentaron algunos resultados clásicos de muestreo para funciones de tipo exponencial. En particular, el hecho, recogido en los Lemas 1.2 y 1.3, de que para funciones de la clase E_R con $R < 1/2$, las p-normas de Lebesgue de la función y de la sucesión obtenida por su restricción a $N-$plas enteras son comparables. En el Teorema 3.3 demostraremos un resultado análogo para funciones de tipo exponencial pertenecientes a espacios de Hardy. En este punto se establece la conexión de nuestros resultados para una dimensión con el trabajo de C. Eoff, [E], al que ya hemos hecho mención en el capítulo anterior.

También en la línea de relacionar los espacios de Hardy clásicos con los espacios de Hardy discretos, el Teorema 3.10 permite construir funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ a partir de las trasladadas según N-plas enteras de una función de tipo exponencial con coeficientes dados por una sucesión de $H^p(\mathbb{Z}^N)$. Dicho teorema, establecido para espacios de Lebesgue L^p, $p \geq 1$, por P. Auscher y María J. Carro en [AC], será la pieza clave para los teoremas de discretización de operadores que se expondrán en el siguiente capítulo.

Por último, como aplicación de estos resultados, se establece una caracterización sobre el tamaño de las transformadas de Fourier de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$, que resulta ser el resultado análogo al dado por Fefferman y Stein en [FS] para transformadas de Fourier de distribuciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$.

Para todo ello, necesitamos fijar cuál es la definición de los espacios de Hardy discretos $H^p(\mathbb{Z}^N)$ para dimensión $N \geq 2$ que vamos a considerar. En el capítulo anterior motivamos el hecho de definir éstos mediante la caracterización maximal discreta en términos del discretizado del núcleo de Poisson y, posteriormente, demostramos que dicha definición es equivalente a la representación atómica de $H^p(\mathbb{Z})$, clásica en la literatura, al considerar $\mathbb{Z}$ como un espacio de tipo homogéneo. Esta versión maximal de los espacios de Hardy discretos puede generalizarse a dimensión arbitraria y será la que consideraremos en el presente capítulo. Dejamos para el Capítulo 5, como se hizo en el anterior capítulo para dimensión uno, las equivalencias de esta caracterización con otras definiciones en dimensión $N \geq 2$.

Definición 3.1 *Definimos para todo $0 < p < \infty$, el espacio*

$$H^p(\mathbb{Z}^N) = \left\{ a \in l^p(\mathbb{Z}^N) \text{ tales que } \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \in l^p(\mathbb{Z}^N) \right\},$$

con la p-norma asociada,

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} = \|a\|_p + \|\sup_{t>0} |P_t^d \star a|\|_p.$$

3.1 Resultados de muestreo para funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ de tipo exponencial

En primer lugar, probamos el siguiente lema técnico que nos será de utilidad para demostrar los resultados del presente y posteriores capítulos.

Lema 3.2 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de forma que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero. Se verifica que*

$$\{\sup_{t>0} |P_t(n) - (P_t * \varphi)(n)|\}_{n \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}} \in l^p(\mathbb{Z}^N),$$

para todo $0 < p < \infty$.

Demostración. Escribimos (ver [SW])

$$(P_t * \varphi)(n) - P_t(n) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi t|\xi|}(\hat{\varphi}(\xi) - 1)\, e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi. \tag{3.1}$$

Si denotamos por $H_t(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}(\hat{\varphi}(\xi) - 1)$, observamos que, debido a las hipótesis sobre $\hat{\varphi}$, $H_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que la derivada parcial de H_t respecto a cualquier multiíndice α, está acotada uniformemente en $t > 0$. Asimismo,

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \frac{\partial^\alpha H_t}{\partial \xi^\alpha}(\xi) = 0.$$

Por ello, si $n_{i_1}, \cdots, n_{i_k}$ son las componentes diferentes de cero de $n = (n_1, \cdots, n_N)$, e integramos por partes reiteradamente en la integral (3.1) respecto a las correspondientes variables $\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}$, tenemos que,

$$(P_t * \varphi)(n) - P_t(n) = \frac{1}{(2\pi i)^{|j|} n_{i_1}^{j_1} \cdots n_{i_k}^{j_k}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^j H_t}{\partial \xi^j}(\xi)\; e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi,$$

donde $j_1, \cdots, j_k$ son las componentes no nulas del multiíndice j correspondientes a las variables $\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_k}$, respectivamente. De aquí que

$$|(P_t * \varphi)(n) - P_t(n)| = O\left(\frac{1}{|n_{i_1}|^{j_1} \cdots |n_{i_k}|^{j_k}}\right). \tag{3.2}$$

Tomando $j_1, \cdots, j_k$ suficientemente grandes, dependiendo de p, queda probado el lema.□

El siguiente teorema constituye la generalización a espacios de Hardy de los Lemas 1.2 y 1.3 para funciones de tipo exponencial y ha sido probado por Q. Sun en [Su2] para funciones de una variable, si bien en su demostración usa las caracterizaciones en términos de funciones de área para $H^p(\mathbb{R})$ y $H^p(\mathbb{Z})$.

Teorema 3.3 *Sea $0 < p \leq 1$. Si $f \in E_R$, con $R < 1/2$, se verifica que para ciertas constantes C_1 y C_2, independientes de f,*

$$C_1 \|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. En primer lugar probaremos la segunda de las desigualdades del teorema. Según el Lema 1.1, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x) = (f * \Phi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f(n)\Phi(x-n)$$

con $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap E_R$, con la condición Φ radial y $\widehat{\Phi} \equiv 1$ sobre el soporte de $\hat{f}$ y sobre un entorno de cero.

Si la sucesión $f^d \in H^p(\mathbb{Z}^N) \subset l^1(\mathbb{Z}^N) \cap l^2(\mathbb{Z}^N)$, tenemos, como consecuencia del Lema 1.3, que $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

Observamos que

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} f(n)\ e^{-2\pi i n\cdot\xi}\ \hat{\Phi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

y que para todo $m \in \mathbb{Z}^N$

$$\begin{aligned}
(P_t * f)(m) &= \left(e^{-2\pi t|\xi|}\hat{f}(\xi)\right)^{\vee}(m) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi t|\xi|} \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f(n)\ e^{-2\pi i n\cdot\xi}\ \hat{\Phi}(\xi)\ e^{2\pi i m\cdot\xi}\ d\xi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f(n) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi t|\xi|}\ \hat{\Phi}(\xi)\ e^{2\pi i(m-n)\cdot\xi}\ d\xi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f(n)\ (P_t * \Phi)(m-n) = (P_t^{\Phi} \star f^d)(m)\cdot
\end{aligned}$$

Como consecuencia del Lema 3.2, tenemos que

$$\| \sup_{t>0} |(P_t^{\Phi} - P_t^d) \star f^d| \|_p \le C \|f^d\|_p \cdot$$

De esta estimación y del Lema 1.6 aplicado a la familia de funciones de tipo exponencial $\{P_t * f\}_{t>0}$, podemos deducir que

$$\| \sup_{t>0} |P_t * f| \|_p \le C \| \sup_{t>0} |(P_t * f)^d| \|_p \le C(\|f^d\|_p + \| \sup_{t>0} |P_t^d \star f^d\|_p) \le C\|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \cdot$$

Para probar la desigualdad de la izquierda, observamos que, como consecuencia del Corolario 1.7, si $0 < p \le 1$, $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap E_R \subset L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. La inclusión continua $H^p \cap L^2 \hookrightarrow L^p$ (ver [Mi]) y el Lema 1.2 implican que

$$\|f^d\|_p \le C\|f\|_p \le C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \cdot$$

Por tanto, retomando el razonamiento anterior, obtenemos que

$$\|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \le C\|f\|_{H^p(\mathbb{R})} \cdot \square$$

Observación. El teorema anterior prueba que una función f de tipo exponencial E_R con $R < 1/2$, cuya sucesión de muestras $f^d \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, verifica que $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$. Veamos que la restricción $R < 1/2$ es necesaria.

Si consideramos la función de una variable

$$f(x) = \text{sinc } x - \text{sinc}(x-1),$$

$f \in E_{\frac{1}{2}}$, y su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\xi) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\xi)(1 - e^{-2\pi\xi i}).$$

Puesto que $\hat{f}$ no es una función continua, $f \notin H^p(\mathbb{R})$ para ningún exponente p con $0 < p \leq 1$ (ver [FS]). En cambio, la sucesión de muestras de f,

$$\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 0, 1, \ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

es un H^p átomo en $\mathbb{Z}$, para $1/2 < p \leq 1$.

Del Teorema 3.3 extraemos un resultado de discretización válido para operadores definidos en $H^p(\mathbb{R}^N)$ a través de multiplicadores m soportados en $[-1/2, 1/2]^N$. Recordamos a continuación la definición de dichos operadores.

Definición 3.4 *Diremos que una función medible m sobre $\mathbb{R}^N$ es un multiplicador en $H^p(\mathbb{R}^N)$, $0 < p \leq 1$, y escribiremos $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$, si y sólo si, para toda $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$, la función $m\hat{f}$ es la transformada de Fourier de alguna distribución de $H^p(\mathbb{R}^N)$ y existe una constante $C > 0$, independiente de f tal que*

$$\| \ (m\hat{f})^\vee \ \|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Corolario 3.5 *Sea $\hat{\Psi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$, tal que $\Psi \in E_R$, $R < 1/2$. Si $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$, la sucesión $\{(\hat{\Psi}\hat{f})^\vee(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Además, para cierta constante $C > 0$*

$$\|\{(\hat{\Psi}\hat{f})^\vee(n)\}\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Demostración. La condición $\hat{\Psi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ implica que para cierta constante positiva C

$$\|(\hat{\Psi}\hat{f})^\vee\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Asimismo, puesto que $(\hat{\Psi}\hat{f})^{\vee} \in E_R$, $R < 1/2$, su restricción a $\mathbb{Z}^N$ resulta ser una sucesión de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ y, como consecuencia del Teorema 3.3,

$$\|\{(\hat{\Psi}\hat{f})^{\vee}(n)\}\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|(\hat{\Psi}\hat{f})^{\vee}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)},$$

de lo que se deduce el corolario. □

En [E], C. Eoff prueba un isomorfismo entre el espacio de funciones de tipo exponencial $E_R \cap L^p(\mathbb{R})$, ($R \leq 1/2$, $0 < p \leq 1$) y el espacio $H^p(\mathbb{Z})$ caracterizado a partir de la transformada discreta de Hilbert. Más exactamente,

Teorema 3.6 ([E]) *Sea $0 < p \leq 1$, y $f \in E_R$ con $R \leq 1/2$. Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que*

$$C_1\|\{(-1)^n f(n)\}\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_p \leq C_2\|\{(-1)^n f(n)\}\|_{H^p(\mathbb{Z})}.$$

Combinando los Teoremas 3.3 y 3.6, podemos obtener el siguiente corolario que supone una extensión, en el caso de una variable, de la primera desigualdad del Teorema 3.3.

Corolario 3.7 *Si $f \in H^p(\mathbb{R}) \cap E_R$ con $R \leq 1$, la sucesión de muestras de f, f^d, pertenece a $H^p(\mathbb{Z})$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

Demostración. En efecto, en el caso $R < 1$ basta observar que si $f \in H^p(\mathbb{R}) \cap E_R$, $f(\frac{\cdot}{2}) \in H^p(\mathbb{R}) \cap E_{R/2}$ y, por tanto, según el Teorema 3.3,

$$\left\|f^d\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C\left\|f\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right\|_{H^p(\mathbb{R})} = C2^{1/p}\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

Por otro lado, puesto que $f(\frac{\cdot}{2}) \in H^p(\mathbb{R}) \cap E_{R/2} \subset L^p(\mathbb{R})$, el Teorema 3.6 asegura que

$$\left\|\left\{(-1)^n f\left(\frac{n}{2}\right)\right\}\right\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq \left\|f\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right\|_p \leq \left\|f\left(\frac{\cdot}{2}\right)\right\|_{H^p(\mathbb{R})} = 2^{1/p}\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

Definimos la sucesión

$$g(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + (-1)^n f\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} 2f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$H^d g^d(2k) = H^d f^d(k),$$

deducimos de las dos desigualdades anteriores que, para cierta $C > 0$,

$$\|f^d\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq \|g^d\|_{H^p(\mathbb{Z})} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R})}.$$

En el caso $f \in E_1 \cap H^p(\mathbb{R})$, se verifica que $f(\cdot/2) \in E_{1/2} \cap H^p(\mathbb{R})$ y por tanto, usando el corolario que queremos probar para $R = 1/2 < 1$, tenemos que $\{f(\frac{n}{2})\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H^p(\mathbb{Z})$. A partir de aquí procedemos como anteriormente.□

Observación. La restricción $R \leq 1$, en el corolario anterior, es necesaria. En efecto, si tomamos $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con sop $\hat{\phi} \subset [-\epsilon, \epsilon]$, $\epsilon < 1/2$, y tal que $\hat{\phi}(0) \neq 0$. Tenemos que para todo $\xi \in (-1/2, 1/2)$,

$$\hat{\phi}(\xi) = \sum_n \phi(n) e^{2\pi i n \xi},$$

puesto que $\hat{\phi}(0) \neq 0$, se verifica que

$$\hat{\phi}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) \neq 0.$$

Definimos $\psi(\cdot) = \phi(\cdot)e^{-2\pi i(\cdot)}$, por tanto, $\hat{\psi}(\cdot) = \hat{\phi}(\cdot + 1)$ y de aquí que sop $\hat{\psi} \subset (-1-\epsilon, -1+\epsilon)$. Claramente $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\hat{\psi}(0) = 0$, por lo que $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, en cambio, la sucesión $\{\psi(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \notin H^1(\mathbb{Z})$ puesto que no se verifica la condición de cancelación necesaria para las sucesiones de $H^1(\mathbb{Z})$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) e^{-2\pi i n} = \hat{\phi}(0) \neq 0.$$

3.2 Construcción de funciones de tipo exponencial en $H^p(\mathbb{R}^N)$ a partir de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$

En [AC], P. Auscher y María J. Carro prueban en el rango $1 \leq p < \infty$, que si $\varphi \in E_R$ es tal que su transformada de Fourier define un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^N)$, se verifica que para toda sucesión a

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\varphi(\cdot - n) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|a\|_{l^p(\mathbb{Z}^N)}, \tag{3.3}$$

con constante $C > 0$ independiente de la sucesión a. Este resultado constituye la pieza básica para la obtención de teoremas sobre discretización de operadores de convolución en L^p expuestos en [AC] y posteriormente extendidos en [C] a operadores integrales. En el Teorema 3.10 damos la demostración de este resultado para espacios de Hardy y, como consecuencia de ello, en el Capítulo 4, desarrollaremos la teoría correspondiente a la discretización de operadores integrales en $H^p(\mathbb{R}^N)$.

Para la prueba del mencionado teorema necesitamos dos resultados previos que exponemos a continuación.

Lema 3.8 *Sea* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *tal que* $0 \leq \alpha_i < 1$, *para todo* $1 \leq i \leq N$. *Definimos para cualquier sucesión* a, $k \in \mathbb{Z}^N$ *y* $t > 0$

$$(P^d_{t,\alpha} \star a)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n) \, \frac{t}{(t^2 + |k - n + \alpha|^2)^{(N+1)/2}}.$$

Se verifica que

$$\left\| \sup_{t>0} |P^d_{t,\alpha} \star a| \right\|_p \leq C \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{\min(\alpha_{i_l}^{j_l}, (1-\alpha_{i_l})^{j_l})} \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)},$$

donde $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}$, *son las componentes no nulas de* α, *para cada* $1 \leq l \leq k$, j_l *es cualquier entero mayor que* $1/p$ *y* C *es independiente de* a *y* α.

Demostración. Para $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, consideramos

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n) \; \Phi(x - n),$$

donde Φ es como en el Lema 3.2. Mediante un razonamiento análogo al expuesto en el Teorema 3.3, obtenemos que para todo $m \in \mathbb{Z}^N$ y $t > 0$,

$$(P_t * g)(m + \alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n) P^\Phi_t(m + \alpha - n). \tag{3.4}$$

Por otro lado, de forma similar a (3.2), obtenemos que para cada $m \in \mathbb{Z}^N$, si $m+\alpha$ tiene componentes diferentes de cero $m_{i_1}+\alpha_{i_1}, \cdots, m_{i_k}+\alpha_{i_k}$

$$P_t^{\Phi}(m+\alpha) = P_t^d(m+\alpha) + O\left(\frac{1}{|m_{i_1}+\alpha_{i_1}|^{j_1}\cdots|m_{i_k}+\alpha_{i_k}|^{j_k}}\right).$$

De aquí que a partir de (3.4), podamos deducir que si $j_l > 1/p$, $1 \le l \le k$,

$$\|\sup_{t>0}|(P_t * g)^d(\cdot+\alpha) - (P_{t,\alpha}^d \star a)|\|_p^p \le C_0\|a\|_p^p.$$

Teniendo en cuenta que si $0<\alpha<1$ y $\lambda>1$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m+\alpha|^{\lambda}} \le \frac{C_\lambda}{\min(\alpha^\lambda,(1-\alpha)^\lambda)},$$

la constante C_0 puede ser estimada como

$$C_0 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{|m_1+\alpha_1|^{j_1p}\cdots|m_N+\alpha_N|^{j_Np}} \le C\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{\min(\alpha_{i_l}^{j_lp},(1-\alpha_{i_l})^{j_lp})} = C_\alpha^p.$$

Como consecuencia de esta estimación y de los Lemas 1.5 y 1.6 aplicados a la familia de funciones de tipo exponencial $\{(P_t * g)(\cdot+\alpha)\}_{t>0}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\sup_{t>0}|P_{t,\alpha}^d \star a|\|_p &\le \|\sup_{t>0}|(P_{t,\alpha}^d \star a) - (P_t * g)^d(\cdot+\alpha)|\|_p + \|\sup_{t>0}|(P_t*g)^d(\cdot+\alpha)|\|_p \\
&\le C_\alpha\|a\|_p + C\|\sup_{t>0}|(P_t*g)|\|_p \le CC_\alpha(\|a\|_p + \|\sup_{t>0}|(P_t*g)^d|\|_p) \\
&\le CC_\alpha(\|a\|_p + \|\sup_{t>0}|(P_t*g)^d - (P_t^d\star a)|\|_p + \|\sup_{t>0}|P_t^d\star a|\|_p) \\
&\le CC_\alpha(\|a\|_p + \|\sup_{t>0}|P_t^d\star a|\|_p) = CC_\alpha\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}\cdot\Box
\end{aligned}$$

Proposición 3.9 *Sea $0<p\le 1$ y $a\in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Fijamos un entero $k\ge 2$ y definimos la sucesión b como,*

$$b(n) = \begin{cases} a(m) & \text{si } n = km \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Entonces, $b \in H^p(\mathbb{Z}^N)$ y además

$$\|b\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \le C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)},$$

con constante $C \sim k^{N/p}$ e independiente de la sucesión.

Demostración. Trivialmente $\|b\|_p = \|a\|_p$.

Para estimar $\|\sup_{t>0}|P_t^d \star b|\|_p$, observamos que

$$
\begin{aligned}
(P_t^d \star b)(n) &= \sum_{m\neq n} \frac{t}{(t^2+|n-m|^2)^{(N+1)/2}} b(m) = \sum_{km\neq n} \frac{t}{(t^2+|n-km|^2)^{(N+1)/2}} b(km) \\
&= \sum_{km\neq n} \frac{t}{(t^2+|n-km|^2)^{(N+1)/2}} a(m).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$(P_{kt}^d \star b)(kn) = \frac{1}{k^N}(P_t^d \star a)(n),$$

y si $l=(l_1,\cdots,l_N)$, $0\le l_i \le k-1$,

$$(P_{kt}^d \star b)(kn+l) = \frac{1}{k^N}\sum_m \frac{t}{(t^2+|(n-m)+l/k|^2)^{(N+1)/2}}\ a(m) = \frac{1}{k^N}(P_{t,l/k}^d \star a)(n).$$

Por el lema anterior, tenemos que para todo $l=(l_1,\cdots,l_N)\neq 0$, $0\le l_i\le k-1$

$$\|\sup_{t>0}|P_{t,l/k}^d \star a|\|_p \le C\prod_{m=1}^{s}\left(\frac{k}{\min(l_{i_m},k-l_{i_m})}\right)^{j_m}\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)},$$

donde $\{l_{i_m}\}_{1\le m\le s}$ son las componentes no nulas del vector l. Tomando $j_m=[1/p]+1$ para todo $1\le m\le s$ obtenemos la estimación

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},\ 0\le l_i\le k-1}\ \prod_{m=1}^{s}\left(\frac{k}{\min(l_{i_m},k-l_{i_m})}\right)^{[1/p]+1} \le Ck^{N[1/p]+N}.$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&\|b\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} = \|b\|_p + \|\sup_{t>0}|P_t^d\star b|\|_p \\
&\le \|b\|_p + C\sum_{l\in\mathbb{Z}^N,\ 0\le l_i\le k-1}\|\sup_{t>0}(P_{kt}^d\star b)(k\cdot+l)\|_p \\
&\le \|a\|_p + \frac{C}{k^N}\|\sup_{t>0}|P_t^d\star a|\|_p + \frac{C}{k^N}\sum_{l\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},\ 0\le l_i\le k-1}\|\sup_{t>0}|P_{t,l/k}^d\star a|\|_p \\
&\le C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} + \frac{C}{k^N}\sum_{l\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},\ 0\le l_i\le k-1}\ \prod_{m=1}^{s}\left(\frac{k}{\min(l_{i_m},k-l_{i_m})}\right)^{j_m}\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \\
&\le Ck^{N/p}\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \ \square
\end{aligned}
$$

Teorema 3.10 *Sea $0 < p \leq 1$ y $\hat{\Psi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$, tal que $\Psi \in E_R$. Si $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\Psi(x-n),$$

converge uniformemente hacia una función de tipo exponencial $g_\Psi \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Además, existe una constante positiva $C = C(\hat{\Psi}, N)$ tal que

$$\|g_\Psi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\Psi(\cdot - n) \right\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \max(1, R^N) \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. En primer lugar, nos restringiremos al caso $R < 1/2$. Consideremos $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap E_R$, con la condición de que $\hat{\varphi} \equiv 1$ sobre sop $\hat{\Psi}$.

Veamos que $g_\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\varphi(x-n) \in H^p(\mathbb{R}^N)$. En efecto, en primer lugar observamos que

$$\|g_\varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\varphi(x-n) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} |a(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_p.$$

Puesto que $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\hat{\varphi}$ es un multiplicador de $L^2(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, por ser $a \in l^2(\mathbb{Z}^N)$, (3.3) nos asegura que $g_\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Por otro lado puesto que $a \in H^p(\mathbb{Z}^N) \subset l^p \subset l^1$ y $P_t \in L^1(\mathbb{R}^N)$, el teorema de la convergencia dominada aplicado a la sucesión de sumas parciales que define la función g_φ nos permite integrar término a término al calcular $P_t * g$ y obtener que

$$(P_t * g_\varphi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ (P_t * \varphi)(x-n).$$

El Lema 3.2 implica que

$$\| \sup_{t>0} |(P_t * g_\varphi)^d| \|_p = \| \sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a| \|_p \leq C(\|a\|_p + \| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p).$$

Podemos, pues, utilizar el Lema 1.6 aplicado a la familia de funciones $\{P_t * g_\varphi\}_{t>0}$, para estimar que

$$\begin{aligned} \|g_\varphi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} &= \| \sup_{t>0} |P_t * g_\varphi| \|_p \leq C \| \sup_{t>0} |(P_t * g_\varphi)^d| \|_p \\ &\leq C(\|a\|_p + \| \sup_{t>0} |P_t^d \star a| \|_p) = C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Puesto que la sucesión $a \in l^p \subset l^1$ y $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\hat{g_\varphi}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) e^{-2\pi i n\cdot\xi} \hat{\varphi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

y por ser $\hat{\varphi} \equiv 1$ sobre sop $\hat{\Psi}$,

$$(\hat{\Psi}\ \hat{g_\varphi})(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ e^{-2\pi i n\cdot\xi}\ \hat{\varphi}(\xi)\hat{\Psi}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n) e^{-2\pi i n\cdot\xi}\ \hat{\Psi}(\xi). \tag{3.6}$$

Recordamos que por ser $\hat{\Psi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$, $\hat{\Psi}$ es una función continua en $\mathbb{R}^N - \{0\}$ y esencialmente acotada (ver [TW]), de aquí que $\hat{\Psi}\ \widehat{g_\varphi} \in L^1$. Por otro lado, por ser $\hat{\Psi}$ una función acotada y de soporte compacto, $\hat{\Psi} \in L^2 \cap L^1$, lo que nos asegura que su cotransformada $\Psi \in L^2 \cap C_0(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, puesto que $g_\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\Psi * g_\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De aquí que, a partir de la igualdad (3.6), obtengamos que

$$(\Psi * g_\varphi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ \Psi(x-n) = g_\Psi(x).$$

Por ser Ψ y g_φ de L^2, tenemos que $(\Psi * g_\varphi)$ es una función continua. Por otra parte, el hecho de que $a \in l^1$ y $\Psi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ nos asegura la convergencia uniforme de la serie que define g_Ψ hacia una función continua.

Como consecuencia de dicha igualdad, (3.5) y del hecho de que $\hat{\Psi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ obtenemos finalmente que para cierta constante $C = C(\hat{\Psi})$

$$\|g_\Psi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \|\Psi * g_\varphi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|g_\varphi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Lo cual prueba el teorema en el caso $R < 1/2$. En el caso R arbitrario, procedemos como sigue.

Sea k el mínimo entero positivo, de forma que $\frac{R}{k} < 1/2$, definimos $\Psi_k = \frac{1}{k^N}\Psi(\frac{\cdot}{k})$, de esta manera $\Psi_k \in E_{R/k}$. A partir de la sucesión a si definimos la sucesión b, asociada al entero k como en la proposición anterior, podemos aplicar dicho resultado para remitirnos al caso $R < 1/2$ y concluir que

$$g_{\Psi_k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} b(n)\Psi_k(x-n) \in H^p(\mathbb{R}^N),$$

además

$$\|g_{\Psi_k}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|b\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq Ck^{N/p}\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \tag{3.7}$$

Por otro lado, de la definición de b se deduce que

$$g_{\Psi_k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\Psi_k(x-kn),$$

y, de aquí,

$$g_{\Psi_k}(kx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\Psi_k(kx-kn) = \frac{1}{k^N}\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\Psi(x-n) = \frac{1}{k^N} g_\Psi(x).$$

De esta igualdad y de (3.7) concluimos que

$$\|g_\Psi\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\frac{1}{k^N}\right)^{\frac{1}{p}-1} \|g_{\Psi_k}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \le Ck^N\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \le CR^N\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}\,. \square$$

3.3 Aplicación: Transformadas de Fourier de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$

Debido a la inclusión $H^p(\mathbb{Z}^N)\subset l^1(\mathbb{Z}^N)$, para $0<p\le 1$, se deduce que la transformada de Fourier de $a\in H^p(\mathbb{Z}^N)$,

$$\hat{a}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\; e^{2\pi i n\cdot\theta},$$

es una función continua periódica. El Teorema 3.10 nos permite transferir la siguiente caracterización de las transformadas de Fourier de distribuciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ dada por Fefferman y Stein en [FS], a estimaciones equivalentes para transformadas de Fourier de sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ (Proposición 3.12).

Teorema 3.11 ([FS]) *Sea $f\in H^p(\mathbb{R}^N)$, $0<p\le 1$. Su transformada de Fourier, $\hat{f}$, es una función continua que, además, verifica*

(a) $|\hat{f}(\xi)| \le C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}|\xi|^{N((1/p)-1)},\ \xi\in\mathbb{R}^N.$

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\hat{f}(\xi)|^p}{|\xi|^{N(2-p)}}\,d\xi \le C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$

Proposición 3.12 *Sean $0<p\le 1$ y $a\in H^p(\mathbb{Z}^N)$. La transformada de Fourier de a, $\hat{a}(\theta)$, cumple que existen constantes C_1 y C_2, independientes de a, para las cuales se verifica*

(a) $|\hat{a}(\theta)| \leq C_1 \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} |\theta|^{N((1/p)-1)}, \ \theta \in [-1/2, 1/2]^N$.

(b) $\displaystyle\int_{[-1/2,1/2]^N} \frac{|\hat{a}(\theta)|^p}{|\theta|^{N(2-p)}}\, d\theta \leq C_2 \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)}$.

Demostración.

A. Miyachi, en [Mi], estudia condiciones suficientes para que una función $m \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ sea un multiplicador de Fourier en $H^p(\mathbb{R}^N)$. Uno de sus resultados implica que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap E_1$, su transformada de Fourier $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$. Tomamos φ en estas condiciones y tal que $|\hat{\varphi}(\xi)| \geq C > 0$, si $\xi \in [-1/2, 1/2]^N$. Definimos la función

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) \varphi(x - n).$$

Podemos aplicar el Teorema 3.10 para deducir que $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ y verifica la estimación

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \tag{3.8}$$

Para la prueba del apartado (a) del teorema, observamos que debido a las hipótesis sobre $\hat{\varphi}$, para todo $\theta \in [-1/2, 1/2]^N$, tenemos

$$\begin{aligned} |\hat{a}(\theta)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) e^{-2\pi i n \cdot \theta} \right| \leq C^{-1} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{-2\pi i n \cdot \theta} \ \hat{\varphi}(\theta) \right| \\ &= C^{-1} |\hat{f}(\theta)| \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} |\theta|^{N((1/p)-1)} \leq C_1 \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} |\theta|^{N((1/p)-1)}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado (3.8) y el Teorema 3.11. Esto prueba (a). Para la prueba del apartado (b) observamos que para f como antes, puesto que $|\hat{\varphi}(\xi)| \geq C$, si $\xi \in [-1/2, 1/2]^N$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\hat{f}(\xi)|^p}{|\xi|^{N(2-p)}}\, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) \ e^{-2\pi i n \cdot \xi} \right|^p \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|^p}{|\xi|^{N(2-p)}}\, d\xi \\ &\geq \int_{[-1/2,1/2]^N} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) \ e^{-2\pi i n \cdot \theta} \right|^p \frac{|\hat{\varphi}(\theta)|^p}{|\theta|^{N(2-p)}}\, d\theta \\ &\geq C \int_{[-1/2,1/2]^N} \frac{|\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) \ e^{-2\pi i n \cdot \theta}|^p}{|\theta|^{N(2-p)}}\, d\theta. \end{aligned}$$

A partir de aquí, aplicando de nuevo el Teorema 3.11 y (3.8), deducimos que

$$\begin{aligned}\int_{[-1/2,1/2]^N} \frac{|\hat{a}(\theta)|^p}{|\theta|^{N(2-p)}}\, d\theta &= \int_{[-1/2,1/2]^N} \frac{|\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\, e^{-2\pi i n\cdot\theta}|^p}{|\theta|^{N(2-p)}}\, d\theta \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\hat{f}(\xi)|^p}{|\xi|^{N(2-p)}}\, d\xi \leq C_2 \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_2 \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \square\end{aligned}$$

Capítulo 4

Discretización de operadores definidos sobre $H^p(\mathbb{R}^N)$

Existen diversos trabajos clásicos en la literatura que relacionan operadores de convolución en $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ y $\mathbb{Z}^N$. Dichos operadores pueden definirse mediante la acción de los multiplicadores correspondientes en el lado de la transformada de Fourier. Así, si m es una función continua en $\mathbb{R}^N$, para $t > 0$, definimos

$$(C_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} m(t\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

para una función f definida en $\mathbb{R}^N$,

$$(P_t g)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} m(tk)\hat{g}(k)e^{2\pi i k\cdot x}, \quad x \in \mathbb{T}^N, \tag{4.2}$$

para una función g periódica en $\mathbb{T}^N$, y

$$(D_t a)(n) = \int_{[-1/2,1/2]^N} m(t\xi)P(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}^N, \tag{4.3}$$

para $a = \{a(n)\}_n$ una sucesión en $\mathbb{Z}^N$ y $P(\xi) = \sum_m a(m)\, e^{2\pi i m\cdot\xi}$.

(4.1) representa la acción de un multiplicador en $\mathbb{R}^N$, (4.2) la de un multiplicador $\{m(tn)\}_n$ en $\mathbb{Z}^N$, mientras que (4.3) es la acción de la extensión periódica de la función $m(t\cdot)\chi_{[-1/2,1/2]^N}(\cdot)$ como multiplicador sobre $\mathbb{T}^N$. Asimismo, definimos los correspondientes operadores maximales

$$C^*f(x) = \sup_{t>0}|C_t f(x)|, \quad P^*g(x) = \sup_{t>0}|P_t g(x)|, \quad D^*a(n) = \sup_{t>0}|D_t a(n)|.$$

Un resultado de K. de Leeuw de 1965 ([Le]) afirma que para $1 < p < \infty$,

$$\|C_1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \text{ si y sólo si } \|P_t g\|_{L^p(\mathbb{T}^N)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{T}^N)},$$

uniformemente en $t > 0$. En [CW1], Coifman y Weiss prueban el mismo resultado mediante métodos de transferencia.

Kenig y Tomas en 1980 ([KT]) extendieron este resultado a los operadores maximales anteriormente descritos. Esto es, para p en el mismo rango,

$$\|C^* f\|_p \leq \|f\|_p \text{ si y sólo si } \|P^* g\|_p \leq \|g\|_p.$$

En 1992, P. Auscher y María J. Carro ([AC]) prueban resultados de discretización para operadores de convolución definidos sobre espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$, haciendo uso de las propiedades de muestreo para familias de funciones de tipo exponencial a las que hemos hecho referencia en el Capítulo 1. Más concretamente, si representamos por $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a la cotransformada de la función m, podemos escribir, al menos formalmente, los operadores (4.1) y (4.3) como convoluciones

$$(C_t f)(x) = (K_t * f)(x), \quad (D_t a)(n) = \sum_m a(m)(K_t * \text{ sinc})(n - m).$$

El papel de la función sinc, que aparece al expresar D_t como convolución, puede ser sustituido por el de otras funciones φ de tipo exponencial, dando lugar a operadores discretos más generales que los dados por (4.3), como son

$$(D_t^\varphi a)(n) = \sum_m a(m)(K_t * \varphi)(n - m).$$

En [AC], se prueba que bajo ciertas hipótesis sobre la función $\varphi \in E_R$,

$$\|Cf\|_p \leq \|f\|_p \text{ si y sólo si } \|D_t^\varphi a\|_p \leq \|a\|_p,$$

uniformemente en $t > 0$. La versión maximal de este resultado también se recoge en [AC].

Recientemente, María J. Carro en [C] ha extendido estos resultados de discretización al caso general de operadores lineales en L^p. En la misma línea, R. Torres en [To], estudia la relación entre multiplicadores sobre espacios de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^N)$ y $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{Z}^N)$ y menciona que estos resultados podrían ser obtenidos para espacios de Triebel-Lizorkin

$F_p^{\alpha,q}$. Por otro lado, en algunos trabajos se han obtenido el mismo tipo de conexiones entre operadores de convolución sobre espacios de Hardy en los grupos clásicos $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ y $\mathbb{Z}^N$. En 1982, L. Colzani extiende en [Co] el resultado de de Leeuw a espacios de Hardy y en [LL] el autor da resultados análogos a los de Kenig y Tomas para este tipo de espacios. El trabajo de Colzani ha sido ampliado por D. Fan en [F1] a espacios de Triebel-Lizorkin de los cuales los espacios de Hardy constituyen un caso particular. El mismo autor en [F2] da una demostración del teorema de de Leeuw en espacios de Lorentz. En [CS], María J. Carro y J. Soria prueban el resultado de Colzani mediante una extensión del teorema de transferencia a espacios de Hardy.

Los últimos resultados mencionados concernientes a la relación entre operadores de convolución en $H^p(\mathbb{R}^N)$ y $H^p(\mathbb{T}^N)$, y a raíz de la teoría desarrollada en espacios de Lebesgue, hacen pensar en la posibilidad de establecer resultados análogos a los de Auscher y Carro que relacionen operadores de convolución en $H^p(\mathbb{R}^N)$ con los correspondientes discretos definidos sobre $H^p(\mathbb{Z}^N)$. Este es el objetivo del presente capítulo.

En la sección 4.1 se obtiene la acotación en $H^p(\mathbb{Z}^N)$ de operadores discretos con núcleos $(K*\varphi)^d$ a partir de la acotación en $H^p(\mathbb{R}^N)$ del operador con núcleo K (Teorema 4.1) donde $\varphi \in E_R$ es tal que $\hat{\varphi}$ es un multiplicador en $H^p(\mathbb{R}^N)$. La versión maximal de este resultado se da en el Teorema 4.3.

La sección 4.2 se ocupa de la demostración de los recíprocos de los teoremas anteriores, es decir, se obtiene la acotación en $H^p(\mathbb{R}^N)$ del operador de convolución con núcleo K a partir de la acotación uniforme en $H^p(\mathbb{Z}^N)$ del operador discreto con núcleo $(K_t * \varphi)^d$, $t > 0$ (Teorema 4.4). El Teorema 4.5 demuestra este resultado para el caso de operadores maximales. Las hipótesis requeridas en estos teoremas incluyen una condición de invertibilidad local para el multiplicador $\hat{\varphi}$; el Teorema 4.6 prueba que para φ en dichas condiciones, se obtiene una clase densa en $H^p(\mathbb{R}^N)$ formada por series de trasladadas y dilatadas de la función φ con coeficientes en $H^p(\mathbb{Z}^N)$.

La sección 4.3 contiene el Teorema 4.8 que generaliza los resultados anteriores al caso de operadores integrales definidos en espacios de Hardy.

Por último, en la sección 4.4 se dan una serie de aplicaciones de los teoremas anteriores; se obtienen nuevas demostraciones de resultados expuestos en otros capítulos, y otros nuevos que nos serán de utilidad posteriormente.

4.1 Acotación de las versiones discretas obtenidas de las correspondientes continuas

Como observamos en el capítulo anterior, el hecho de que $m \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ implica que $m \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, su cotransformada $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ da lugar a un núcleo de convolución en $L^2(\mathbb{R}^N)$, definido por

$$(K * f)(x) := (m(\xi)\hat{f}(\xi))^\vee(x), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado, como vimos en el Teorema 3.10, si $\varphi \in E_R$ y $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ tenemos que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Con lo cual observamos que para m y φ en dichas condiciones,

$$(K * \varphi)(n) = (m(\xi)\hat{\varphi}(\xi))^\vee(n),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^N$.

Si notamos por $K^\varphi(n) = (K * \varphi)(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^N$, el siguiente teorema prueba la acotación en $H^p(\mathbb{Z}^N)$ del operador discreto con núcleo K^φ, a partir de la acotación en $H^p(\mathbb{R}^N)$ del operador de convolución con núcleo K.

Teorema 4.1 *Sea* $0 < p \leq 1$ *y* $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

1. $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$.

2. $\varphi \in E_R,\ R < 1/2$.

Se verifica que

$$\|K * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \tag{4.4}$$

implica

$$\|K^\varphi \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \quad a \in H^p(\mathbb{Z}^N).$$

Demostración.

Si $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, construimos la función

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n)\varphi(x - n),$$

la cual, debido al Teorema 3.10, cumple que $g \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

También observamos en dicho teorema que $g \in E_R$. En consecuencia, si $(m)^\vee = K$, podemos escribir que

$$(K * g)\hat{}\,(\xi) = m(\xi)\hat{g}(\xi) = \sum_n a(n)e^{-2\pi i n\cdot\xi} m(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N).$$

La igualdad anterior y la hipótesis (4.4) implican que $K * g \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap E_R \subset L^2(\mathbb{R}^N),\ R < 1/2$. Con lo cual para todo $m \in \mathbb{Z}^N$, se obtiene que

$$(K * g)(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)(K * \varphi)(m-n) = (K^\varphi \star a)(m).$$

El Teorema 3.3 asegura que

$$\|(K * g)^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|K * g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Finalmente, usamos (4.4) y el Teorema 3.10 y concluimos que

$$\begin{aligned}\|K^\varphi \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} &= \|(K * g)^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|K * g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\|g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.\square\end{aligned}$$

En [J], Jodeit prueba que si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es un multiplicador en $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, con soporte en $[-1/2, 1/2]^N$, la extensión periódica de m es un multiplicador en $L^p(\mathbb{T}^N)$. Si en el teorema anterior tomamos como núcleo $K = \delta$, la distribución de Dirac en cero, obtenemos el siguiente corolario que supone una extensión del resultado de Jodeit para el caso de espacios de Hardy.

Corolario 4.2 *Sea $0 < p \leq 1$ y $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

1. $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$.
2. $\varphi \in E_R,\ R < 1/2$.

Entonces, se verifica que

$$\|\varphi^d \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \quad a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$$

donde C depende solamente de la norma de $\hat{\varphi}$ como multiplicador.

El siguiente resultado constituye una versión maximal del Teorema 4.1.

Teorema 4.3 *Sea* $0 < p \leq 1$ *y* $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tal que*

1. $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$.

2. $\varphi \in E_R,\ R < 1/2$.

Entonces, si para todo $t > 0$, $K_t^\varphi = \{(K_t * \varphi)(n)\}_{n \in \mathbb{Z}^N}$, *se verifica que la condición*

$$\| \sup_{t>0} |K_t * f| \; \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \tag{4.5}$$

implica

$$\| \sup_{t>0} |K_t^\varphi \star a| \; \|_{l^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \quad a \in H^p(\mathbb{Z}^N).$$

Demostración. Como antes, si $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$ construimos la función

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n)\varphi(x - n) \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N).$$

También como en el Teorema 4.1 se verifica que para todo $t > 0$,

$$(K_t * g)(m) = (K_t^\varphi \star a)(m), \ m \in \mathbb{Z}^N.$$

El Lema 1.5 aplicado a la familia de funciones de tipo exponencial $\{K_t * g\}_{t>0}$, asegura que

$$\| \sup_{t>0} |K_t^\varphi \star a| \|_p = \| \sup_{t>0} |(K_t * g)^d| \|_p \leq C\| \sup_{t>0} |K_t * g| \|_p.$$

Finalmente, como consecuencia de la hipótesis (4.5) y el Teorema 3.10, obtenemos que

$$\| \sup_{t>0} |K_t^\varphi \star a| \|_p \leq C\| \sup_{t>0} |K_t * g| \|_p \leq C\|g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \ \square$$

4.2 Acotación de las versiones continuas a partir de las correspondientes discretas

El siguiente teorema constituye un recíproco del Teorema 4.1, es decir, se obtiene la acotación en $H^p(\mathbb{R}^N)$ del operador de convolución con núcleo K a partir de la acotación en $H^p(\mathbb{Z}^N)$ del operador de convolución discreto con núcleo formado por la sucesión $\{K_t^\varphi(n)\}_n = \{(m(t\cdot)\,\hat{\varphi})^\vee(n)\}_n$, de manera uniforme en $t > 0$. Esta vez supondremos que m es una función acotada y que las hipótesis sobre $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ son cercanas a la condición $1/\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$.

Diremos que φ satisface la propiedad de invertibilidad local en H^p si para cierto $\epsilon > 0$, existe $h \in C_0^\infty(-\epsilon, \epsilon)^N$, $h \equiv 1$ sobre $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]^N$ tal que $h/\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$.

Teorema 4.4 *Sea $0 < p \leq 1$ y $\hat{\varphi}$ una función $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ de forma que*

1. *$\varphi \in E_R,\ R < 1/2$.*

2. *φ satisface la propiedad de invertibilidad local para $\epsilon > 0$.*

Entonces, se verifica que la condición

$$\|K_t^\varphi \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \quad a \in H^p(\mathbb{Z}^N) \ \textit{ uniformemente en } t > 0 \tag{4.6}$$

implica

$$\|K * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \quad f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N). \tag{4.7}$$

Demostración. El siguiente argumento de densidad, reducirá la prueba al caso de funciones $f \in H^p \cap L^2$ con transformada de Fourier de soporte compacto.

Si $f \in H^p \cap L^2$ general, consideramos $\Phi \in \mathcal{S}$ de tipo exponencial con $\int \Phi = 1$ y la sucesión $\{f_n\}_n = \{f * \Phi_{1/n}\}_n$ formada, por tanto, por funciones de $H^p \cap L^2$ y con transformada de Fourier de soporte compacto tal que, $\|f_n - f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (ver [St3], pág. 127). Si probamos (4.7) para toda función de $H^p \cap L^2$ con transformada de Fourier de soporte compacto, obtenemos en particular que

$$\|K * (f_n - f_m)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f_n - f_m\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Con lo cual se deduce que la sucesión $\{K * f_n\}_n$ es de Cauchy en H^p. Por completitud del espacio H^p tenemos que $(K * f_n) \xrightarrow{n} g$ en H^p y, por tanto, en $\mathcal{S}'$ (ver [GR], pág. 274). Puesto que, por hipótesis, $m = \hat{K} \in L^\infty$, K define un operador de convolución acotado en L^2 y, por tanto, para toda $\Psi \in \mathcal{S}$

$$\left| \int \Psi(x)\ (K * (f_n - f))(x)\ dx \right| \leq \|\Psi\|_2 \|K * (f_n - f)\|_2 \leq C\|\Psi\|_2 \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n} 0.$$

Es decir, $K * f_n \xrightarrow{n} K * f$ en $\mathcal{S}'$, y de aquí que $K * f = g$ en el sentido de las distribuciones, con lo cual obtenemos que,

$$\|K * (f_n - f)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \xrightarrow{n} 0.$$

Veamos, además, que podemos restringirnos al caso sop $\hat{f} \subset [-\delta, \delta]^N$ con $\delta < \frac{\epsilon}{2}$, $\delta < 1 - R$, si demostramos

$$\|K_t * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \text{ uniformemente en } t > 0. \tag{4.8}$$

Así, si $f \in H^p \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ y de tipo exponencial, no verifica las condiciones anteriores respecto al soporte de su transformada de Fourier, podemos escribir $f(\cdot) = g(\alpha \cdot)$, de manera que g sí las verifique para cierto factor de escala $\alpha > 0$. Si aplicamos (4.8) a la función g, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|K * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(K_\alpha * g)(\alpha \cdot)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\alpha^{N/p}} \|K_\alpha * g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{C}{\alpha^{N/p}} \|g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \frac{C}{\alpha^{N/p}} \alpha^{N/p} \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned}$$

lo cual probaría el teorema.

Por tanto, sea $f \in H^p \cap L^2$, sop $\hat{f} \subset [-\delta, \delta]^N$ con δ como antes. Escribimos para todo $\xi \in [-1/2, 1/2]^N$

$$\hat{f}(\xi) = (\hat{f}h)(\xi) = \left(\left(\frac{\hat{f}h}{\hat{\varphi}} \right)(\xi) \right) \hat{\varphi}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left(\frac{\hat{f}h}{\hat{\varphi}} \right)(\xi + k) \right) \hat{\varphi}(\xi).$$

Esta última igualdad se verifica por la elección de δ con respecto a R (en la serie, los términos con $k \neq 0$ se anulan). La serie anterior define una función $1-$periódica $P(\xi)$ cuyos coeficientes de Fourier son

$$a(m) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\hat{f}h}{\hat{\varphi}} \right)(y)\ e^{-2\pi i m \cdot y}\ dy,$$

teniendo en cuenta que, puesto que $h/\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $\hat{f} \in L^2$ es de soporte compacto, la función $\left(\frac{\hat{f}h}{\hat{\varphi}}\right) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Por hipótesis, $h/\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ y con soporte contenido en $(-1/2, 1/2)^N$, podemos, pues, aplicar el Corolario 3.5 y concluir que

$$a = \left\{ \left(\hat{f}\frac{h}{\hat{\varphi}}\right)^\vee (-n) \right\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in H^p(\mathbb{Z}^N)$$

con

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{4.9}$$

Por otro lado, si escribimos $\hat{K} = m \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar, para cada $t > 0$, el teorema de inversión en todo punto a la función de tipo exponencial $K_t * f$, cuya transformada de Fourier es $(m(t\cdot)\hat{f}(\cdot))(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Así, obtenemos que para todo $t > 0$ y $n \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned} (K_t * f)(n) &= \int_{\mathbb{R}^N} m(\xi t)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi \\ &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^N} m(\xi t)\left(\frac{\hat{f}h}{\hat{\varphi}}\right)(\xi)\hat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi \\ &= \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^N} m(\xi t)P(\xi)\hat{\varphi}(\xi)e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi = (K_t^\varphi \star a)(n). \end{aligned}$$

El Teorema 3.3 aplicado a cada función $K_t * f \in E_R$, $R < 1/2$, nos asegura que

$$\|K_t * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|(K_t * f)^d\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} = C\|K_t^\varphi \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Finalmente, podemos estimar a partir de esta última desigualdad, (4.6) y (4.9) que

$$\|K_t * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|K_t^\varphi \star a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}. \quad \square$$

La versión maximal del teorema anterior y que constituye el recíproco del Teorema 4.3 es la siguiente.

Teorema 4.5 *Sea $0 < p \leq 1$ y $\hat{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ una función en las mismas condiciones del Teorema 4.4.*

Se verifica que

$$\| \sup_{t>0} |K_t^{\varphi} \star a| \, \|_p \leq C \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \;\; a \in H^p(\mathbb{Z}^N) \tag{4.10}$$

implica

$$\| \sup_{t>0} |K_t * f| \, \|_p \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \;\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap H^p(\mathbb{R}^N). \tag{4.11}$$

Demostración. Nos restringiremos a probar (4.11) para $f \in H^p \cap \mathcal{S}$ de tipo exponencial, considerando la sucesión $\{f_n\}_n = \{f * \Phi_{1/n}\}_n$, formada por funciones de tipo exponencial de $H^p \cap \mathcal{S}$, que aproximan a f en H^p. Además

$$\|\Phi_{1/n} * f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \tag{4.12}$$

(ver [St3], pág. 127 y 128). Por el teorema de convergencia dominada, se verifica que

$$(K_t * f_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} m(\xi t) \hat{f}_n(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \, d\xi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (m(t\cdot)\hat{f}(\cdot))^{\vee}(x) = (K_t * f)(x),$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Por lo tanto, como consecuencia del Lema de Fatou, y de (4.12),

$$\begin{aligned} \| \sup_{t>0} |K_t * f| \|_p^p &= \| \sup_{t>0} \lim_{n\to\infty} |K_t * f_n| \|_p^p \leq \| \lim \inf_{n\to\infty} \sup_{t>0} |K_t * f_n| \|_p^p \\ &\leq \lim \inf_{n\to\infty} \| \sup_{t>0} |K_t * f_n| \|_p^p \leq C \lim_n \|f_n\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la invariancia por dilataciones del operador maximal

$$f \longrightarrow \sup_{t>0} |K_t * f|,$$

nos permite reducir la prueba al caso de funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ con sop$\hat{f} \subset [-\delta, \delta]^N$, $\delta < \frac{\epsilon}{2}$, $\delta < 1 - R$. Más exactamente, si $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ y $g(\cdot) = \alpha^N f(\alpha \cdot)$ para $\alpha > 0$, entonces

$$\sup_{t>0} |(K_t * g)(x)| = \alpha^N \sup_{t>0} |(K_t * f)(\alpha x)|.$$

Argumentando, pues, como en el Teorema 4.4, podemos deducir que para todo $n \in \mathbb{Z}^N$, y $t > 0$.

$$(K_t * f)(n) = (K_t^{\varphi} \star a)(n),$$

donde $a = \left\{ \left(\hat{f} \dfrac{h}{\hat{\varphi}} \right)^{\vee} (-n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}^N} \in H^p(\mathbb{Z}^N)$.

Aplicamos el Lema 1.6 en el caso $q = \infty$ a la familia $\{K_t * f\}_{t>0}$ y deducimos que

$$\|\sup_{t>0} |K_t * f|\|_p \leq C\|\sup_{t>0} |(K_t * f)^d|\|_p = C\|\sup_{t>0} |K_t^{\varphi} \star a|\|_p.$$

A partir de esta estimación, (4.9) y (4.10), obtenemos que

$$\|\sup_{t>0} |K_t * f|\|_p \leq C\|\sup_{t>0} |K_t^{\varphi} \star a|\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)},$$

como queríamos probar.□

La condición de invertibilidad local requerida en las hipótesis de los Teoremas 4.4 y 4.5 tiene la siguiente implicación:

Teorema 4.6 *Sea $\varphi \in E_R$, $R < 1/2$ con $\hat{\varphi} \in L^\infty$, y de forma que φ verifique la condición de invertibilidad local en $H^p(\mathbb{R}^N)$ para $\epsilon > 0$, entonces el espacio $H^{\varphi}_{H^p}$ es denso en $H^p(\mathbb{R}^N)$ donde*

$$H^{\varphi}_{H^p} = \left\{ 2^{Nk} \sum_n a(n)\ \varphi(2^k \cdot -n);\ k \in \mathbb{Z},\ a \in H^p(\mathbb{Z}^N) \right\}.$$

Demostración. Sea $f \in H^p \cap \mathcal{S} \cap E_{2^k}$ y k_0 tal que $2^{-k_0} \leq \min(\epsilon/2, 1-R)$. Entonces, si $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(2^{k+k_0}\xi)$, $g \in E_{2^{-k_0}}$ y, por tanto, si $h \in C^\infty$ es tal que sop $h \subset (-\epsilon, \epsilon)^N$ y $h \equiv 1$ en $[-\epsilon/2, \epsilon/2]^N$,

$$\hat{g}(\xi) = \hat{g}(\xi)h(\xi) = \hat{g}(\xi)\frac{h(\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)}\hat{\varphi}(\xi) = P(\xi)\hat{\varphi}(\xi). \tag{4.13}$$

Puesto que $\varphi \in E_R$ con $R \leq 1 - 2^{-k_0}$, obtenemos que

$$\hat{g}(\xi) = \left(\sum_k P(\xi + k)\right)\hat{\varphi}(\xi).$$

Escribimos $\sum_k P(\xi + k) = \sum_m a(m)\ e^{-2\pi i \xi \cdot m}$, donde

$$a(m) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(\xi)\frac{h(\xi)}{\hat{\varphi}(\xi)}\ e^{2\pi i m \cdot \xi}\ d\xi = \left[\left(\frac{h}{\hat{\varphi}}\right)^{\vee} * g\right](m).$$

Por ser $\left(\frac{h}{\hat{\varphi}}\right)^{\vee} * g$ de tipo exponencial $R < 1/2$ y $\|\left(\frac{h}{\hat{\varphi}}\right)^{\vee} * g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}$, obtenemos, como consecuencia del Corolario 3.5, que $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$ y

$$\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|g\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C2^{(-N+N/p)(k+k_0)}\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De (4.13), obtenemos que

$$g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} a(m)\ \varphi(x-m),$$

y de aquí que,

$$f(x) = 2^{N(k_0+k)} \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} a(m)\ \varphi(2^{k_0+k}x-m),$$

con $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Por tanto, $f \in H^{\varphi}_{H^p}$. Como $H^p \cap \mathcal{S} \cap (\cup_k E_{2^k})$ es denso en $H^p(\mathbb{R}^N)$ ([St3], pág 217 y 218), obtenemos la densidad de $H^{\varphi}_{H^p}$. $\square$

Para multiplicadores $m = \hat{K}$ de soporte compacto, los Teoremas 4.3 y 4.5 admiten la siguiente simplificación.

Proposición 4.7 *Supongamos que $m = \hat{K}$ tiene soporte compacto. Sea φ como en los Teoremas 4.3 y 4.5, con la condición adicional de que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero, y sea $A > 0$ tal que $K^{\varphi}_t = K_t$ para $t \geq A$. Entonces, si $0 < p \leq 1$,*

$$\|\sup_{t>0} |K_t * f|\|_p \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)},\ \ f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \tag{4.14}$$

es equivalente a

$$\|\sup_{t\geq A}\ |\ \sum_m K_t(m)a(n-m)\ |\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \tag{4.15}$$

Demostración. Claramente, (4.14) implica (4.15) como consecuencia del Teorema 4.3.

Para ver el recíproco basta ver que es posible retomar el razonamiento expuesto en el Teorema 4.5. En primer lugar, observamos que si sop $\hat{f} \subset [-\delta,\delta]^N$ con δ como en dicho teorema, probamos que para todo $n \in \mathbb{Z}^N$ y $t \geq A$,

$$(K_t * f) = (K^d_t \star a)(n),$$

donde $a = \left\{\left(\hat{f}\dfrac{h}{\hat{\varphi}}\right)^{\vee}(-n)\right\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Aplicamos el Lema 1.6 en el caso $q = \infty$ a la familia $\{K_t * f\}_{t\geq A}$ y deducimos de la acotación del operador maximal discreto

(4.15) que,

$$
\begin{aligned}
(4.16) \qquad \|\sup_{t\geq A}|K_t * f|\|_p &\leq C\|\sup_{t\geq A}|(K_t * f)^d|\|_p = C\|\sup_{t\geq A}|K_t^d \star a|\|_p \\
&\leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

A partir de este hecho, mediante un cambio de escala, podemos deducir la acotación del operador maximal continuo (4.14) para toda función $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ y de tipo exponencial. En efecto, sea $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que sop $\hat{g} \subset [-R, R]^N$ con $\delta < R$. Si h es cualquier función, notaremos para $\alpha > 0$, $h^\alpha(\cdot) = h(\alpha\cdot)$, $h_\alpha(\cdot) = \frac{1}{\alpha^N} h(\frac{\cdot}{\alpha})$. Efectuando sencillos cambios de variable obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|\sup_{t\geq A}|K_t * g|\,\|_p^p &= \|\sup_{t\geq A}|(K_{\frac{R}{\delta}t} * g^{\frac{\delta}{R}})^{\frac{R}{\delta}}|\,\|_p^p = \|\sup_{\frac{R}{\delta}t\geq\frac{R}{\delta}A}|(K_{\frac{R}{\delta}t} * g^{\frac{\delta}{R}})^{\frac{R}{\delta}}|\,\|_p^p \\
&= \|\sup_{s\geq\frac{R}{\delta}A}|(K_s * g^{\frac{\delta}{R}})^{\frac{R}{\delta}}|\,\|_p^p = \left(\frac{\delta}{R}\right)^N \|\sup_{s\geq\frac{R}{\delta}A}|(K_s * g^{\frac{\delta}{R}})|\|_p^p \\
&\leq \left(\frac{\delta}{R}\right)^N \|\sup_{s\geq A}|(K_s * g^{\frac{\delta}{R}})|\,\|_p^p \leq C_p \left(\frac{\delta}{R}\right)^N \|g^{\frac{\delta}{R}}\|_{H^p(\mathbb{R})}^p \\
&= C_p \left(\frac{\delta}{R}\right)^N \left(\frac{R}{\delta}\right)^N \|g\|_{H^p(\mathbb{R})}^p = C_p\|g\|_{H^p(\mathbb{R})}^p,
\end{aligned}
$$

puesto que sop$(g^{\frac{\delta}{R}})\hat{} \subset [-\delta, \delta]^N$, hemos podido utilizar la acotación (4.16) en este caso.

Por otro lado, un tipo de razonamiento similar al anterior, nos permite sustituir la constante A por cualquier otra. En efecto, para cada $C > 0$

$$
\begin{aligned}
\|\sup_{t\geq C}|K_t * f|\|_p^p &= \|\sup_{s\geq A}|(K_s * f^{\frac{C}{A}})^{\frac{A}{C}}|\|_p^p = \left(\frac{C}{A}\right)^N \|\sup_{s\geq A}|(K_s * f^{\frac{C}{A}})|\|_p^p \\
&\leq C_p \left(\frac{C}{A}\right)^N \|f^{\frac{C}{A}}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}^p = C_p \left(\frac{C}{A}\right)^N \left(\frac{A}{C}\right)^N \|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}^p \\
&= C_p\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}
$$

Por último, si aplicamos el lema de Fatou, obtenemos (4.14)

$$
\|\sup_{t>0}|(K_t * f)|\|_p^p \leq \lim_{C\to 0}\|\sup_{t\geq C}|K_t * f|\|_p^p \leq C_p\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}^p. \ \square
$$

4.3 Discretización de operadores integrales

En [C] se extienden los resultados de discretización de operadores de convolución en $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 < p \le \infty)$, expuestos en [AC], a operadores lineales en general. Dicha extensión usa fuertemente la dualidad L^p, $L^{p'}$. En el caso de operadores integrales se da una demostración de dicho resultado que evita el paso por dualidad. El siguiente teorema muestra cómo las técnicas aplicadas en dicho resultado se generalizan a espacios de Hardy.

Consideraremos operadores integrales con núcleo K,

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\ f(y)\ dy, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

bajo la hipótesis de que $\|K(x,\cdot)\|_2 \le C$ y $\|K(\cdot,y)\|_2 \le C$ uniformemente en x e y, respectivamente. Observamos que con estas hipótesis, la desigualdad integral de Minkowski implica que

$$\|Tf\|_2 \le C\|f\|_1. \tag{4.17}$$

Teorema 4.8 *Sea $0 < p \le 1$ y $R < 1/2$. Supongamos que φ y ϕ satisfacen*

(a) $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$,

(b) φ, $\phi \in E_R$,

(c) Existe $\epsilon > 0$ *y* $h \in C_0^\infty(-\epsilon,\epsilon)^N$ *con* $h \equiv 1$ *sobre* $[-\epsilon/2,\epsilon/2]^N$ *y tal que* $h/\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$,

(d) $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *y* $\int \phi = 1$.

Entonces, T se extiende de $H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ a un operador acotado en $H^p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si los operadores $\tilde{T}_k$, asociados a las matrices

$$\left(< 2^{kN}\ T(\varphi(2^k \cdot -n)), \phi(2^k \cdot -m) >\right)_{n,m},$$

están acotados sobre $H^p(\mathbb{Z}^N)$, uniformemente en $k \in \mathbb{Z}$.

OBSERVACIÓN: *El hecho de que $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$ sea de soporte compacto implica que $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ y, en consecuencia, debido a las hipótesis sobre el núcleo integral que define el operador T, $T(\varphi)$ tiene sentido puntualmente.*

Demostración. Veamos en primer lugar que esta condición es necesaria.

Construimos para $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, la función

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\varphi(x-n).$$

En el Teorema 3.10, observamos que $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$. Si notamos por $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$, tenemos que para todo $t > 0$, y $n \in \mathbb{Z}^N$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\phi}_t * Tf_t)(tn) &= \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\phi}_t(tn-x)\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\ f_t(y)\ dy\right)\ dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f_t(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\tilde{\phi}_t(tn-x)\ dx\right)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f_t(y)(K *_1 \tilde{\phi}_t)(tn,y)\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi t)(K *_1 \tilde{\phi}_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi)\ d\xi,
\end{aligned}$$

donde $*_1$ representa la convolución respecto a la primera variable y $\widehat{}_2$ denota a la transformada de Fourier con respecto a la segunda variable.

En el Teorema 3.10, observamos que podemos escribir la transformada de Fourier de f_t como

$$\hat{f}(\xi t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} a(m)e^{-2\pi i m\cdot\xi t}\hat{\varphi}(\xi t),$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
t^N(\tilde{\phi}_t * Tf_t)(tn) &= t^N \sum_m a(m)\int_{\mathbb{R}} (\varphi_t)\,\widehat{}\,(\xi)e^{-2\pi i m\cdot\xi t}(K *_1 \tilde{\phi}_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi)\ d\xi \\
&= t^N \sum_m a(m)\left((K *_1 \tilde{\phi}_t) *_2 \varphi_t\right)(tn,-tm) \\
&= \sum_m a(m)\frac{1}{t^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\tilde{\phi}\left(n-\frac{x}{t}\right)\ dx\ \varphi\left(-m-\frac{y}{t}\right)\ dy \\
&= \sum_m a(m)\frac{1}{t^N}\int_{\mathbb{R}^N} T\left[\tilde{\varphi}\left(\frac{\cdot}{t}+m\right)\right](x)\phi\left(\frac{x}{t}-n\right)\ dx\cdot
\end{aligned}$$

Puesto que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que $(\tilde{\phi}_t * Tf_t) \in H^p(\mathbb{R}^N)$ y además existe una constante $C > 0$, independiente de $t > 0$, tal que

$$\|\tilde{\phi}_t * Tf_t\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|Tf_t\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Por otro lado, el hecho de que $\phi \in E_R$, implica que $(\tilde{\phi}_t * Tf_t)_{1/t} \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap E_R$. Por tanto, como consecuencia del Teorema 3.3, se tiene que

$$t^N \|\{(\tilde{\phi}_t * Tf_t)(tn)\}_n\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq Ct^{N-N/p} \|\tilde{\phi}_t * Tf_t\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

De estas dos observaciones y, de nuevo, el Teorema 3.10, deducimos que si tomamos $t = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_k a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} &= 2^{kN} \|\{(\tilde{\phi}_{2^k} * Tf_{2^k})(2^k n)\}_n\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C2^{k(N-N/p)} \|Tf_{2^k}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C2^{k(N-N/p)} \|f_{2^k}\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}, \end{aligned}$$

lo cual nos da la condición necesaria del teorema.

Para la prueba del recíproco, observamos que mediante un razonamiento de densidad análogo al del Teorema 4.4 basta restringirse a funciones $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ de tipo exponencial. En este caso, para $\{f_n\}_n$ como en dicho teorema, la convergencia de la sucesión Tf_n hacia Tf en el sentido de las distribuciones se deduce del hecho de la desigualdad (4.17), puesto que

$$\|T(f_n - f)\|_2 \leq C\|(f_n - f)\|_1 \xrightarrow{n} 0.$$

Además basta ver que para toda función $f \in H^p \cap L^2$ con sop $\hat{f} \subset [-\delta, \delta]^N$ tal que $\delta <$ mín $((1-R)/t, \epsilon/2t)$, tenemos que

$$\|T_s f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \text{ uniformemente en } s > 0, \tag{4.18}$$

donde T_s es el operador integral asociado al núcleo $s^{-N}K(x/s, y/s)$. Dicha restricción es posible puesto que, si representamos por $f^\alpha(\cdot) = f(\alpha\cdot)$, tenemos que

$$(Tf)(x) = (T_{1/\alpha} f^\alpha)(x/\alpha),$$

y de aquí que, por (4.18)

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} &= \|(T_{1/\alpha} f^\alpha)(\cdot/\alpha)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = \alpha^{N/p} \|T_{1/\alpha} f^\alpha\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C\alpha^{N/p} \|f^\alpha\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Para ello demostraremos que para t pequeño, la función $\tilde{\phi}_t * T_s f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ con $\|\tilde{\phi}_t * T_s f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}$ y C independiente de t y de s. Entonces, usando la condición (d) del teorema, podemos deducir que

$$\|T_s f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}, \text{ uniformemente en } s > 0.$$

Razonando como antes, tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}^N$

$$(\tilde{\phi}_t * T_s f)(tn) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)(K_s *_1 \tilde{\phi}_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi)\; d\xi.$$

Puesto que hemos escogido $t < \frac{\epsilon}{2\delta}$ y que $h/\widehat{\varphi} \in \mathcal{M}(H^p(\mathbb{R}^N))$, podemos escribir que

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)h(t\xi) = \hat{f}(\xi)\frac{h(t\xi)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(t\xi)}\widehat{\tilde{\varphi}}(t\xi).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\tilde{\phi}_t * T_s f)(tn) &= \int_{[-\frac{1}{2t},\frac{1}{2t}]^N} \frac{\hat{f}(\xi)h(t\xi)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(t\xi)}(K_s *_1 \tilde{\phi}_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi)\widehat{\tilde{\varphi}}(t\xi)\; d\xi \\ &= \int_{[-\frac{1}{2t},\frac{1}{2t}]^N} \frac{\hat{f}(\xi)h(t\xi)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(t\xi)}(K_s * \tilde{\phi}_t\; \tilde{\varphi}_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi)\; d\xi \\ &= t^{-N}\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^N} \frac{\hat{f}(\xi/t)h(\xi)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi)}(K_s * J_t)\,\widehat{}^{\,2}(tn,\xi/t)\; d\xi \\ &= \sum_m \hat{P}_t(m)(K_s * J_t)(tn,tm),\end{aligned}$$

donde $\{\hat{P}_t(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^N}$ son los coeficientes de Fourier de la función de periódica definida por la serie

$$P_t(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N}\left(\frac{\hat{f}((\xi+k)/t)h(\xi+k)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi+k)}\right),\; \xi \in [-1/2,1/2]^N.$$

El hecho de que $\delta < (1-R)/t$ implica que en la serie anterior, los términos con $k \neq 0$ se anulan y, por tanto, podemos calcular los coeficientes de Fourier $\{\hat{P}_t(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^N}$ a partir de la expresión

$$a_t(m) = \hat{P}_t(m) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\hat{f}(\xi/t)h(\xi)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(\xi)}\; e^{-2\pi i m\cdot\xi}\; d\xi = \left(\frac{\hat{f}(\cdot/t)h(\cdot)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(\cdot)}\right)^{\vee}(-m).$$

y, en consecuencia, debido al Corolario 3.5, se tiene que

$$\|a_t\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} = \left\|\left\{\left(\frac{\hat{f}(\cdot/t)h(\cdot)}{\widehat{\tilde{\varphi}}(\cdot)}\right)^{\vee}(-m)\right\}_{m\in\mathbb{Z}^N}\right\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq \|t^N f(t\cdot)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Por otro lado, si n y $m \in \mathbb{Z}^N$

$$\begin{aligned}(K_s * J_t)(tn, tm) &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K_s(x,y)\tilde{\phi}_t(tn-x)\tilde{\varphi}_t(tm-y)\ dx\ dy \\ &= s^N \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)t^{-N}\phi\left(\frac{s}{t}x-n\right)t^{-N}\varphi\left(\frac{s}{t}y-m\right)\ dx\ dy,\end{aligned}$$

y, por tanto, escogiendo t tal que $\frac{s}{t} = 2^k$, con $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos

$$(K_s * J_t)(tn, tm) = t^{-N} < 2^{kN}T(\varphi(2^k \cdot -m)), \phi(2^k \cdot -n) >,$$

y de aquí que,

$$t^N(\tilde{\phi}_t * T_s f)(tn) = \tilde{T}_k a_t(n).$$

La condición (b) implica que

$$\text{sop } (\tilde{\phi}_t * T_s f)\widehat{\ } \subset [-R/t, R/t]^N \subset \left[-\frac{1}{2t}, \frac{1}{2t}\right]^N,$$

y, en consecuencia, el Teorema 3.3 implica que

$$\|\tilde{\phi}_t * T_s f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \sim t^{N/p}\|\{(\tilde{\phi}_t * T_s f)(tn)\}_{n\in\mathbb{Z}^N}\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

De todo lo anterior, y haciendo uso de la hipótesis sobre la acotación uniforme de los operadores $\tilde{T}_k$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{\phi}_t * T_s f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} &\leq t^{N/p}\|\{(\tilde{\phi}_t * T_s f)(tn)\}_{n\in\mathbb{Z}^N}\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \\ &= t^{N/p}t^{-N}\|\tilde{T}_k a_t\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq Ct^{\frac{N}{p}-N}\|a_t\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \\ &\leq Ct^{\frac{N}{p}-N}\|t^N f(t\cdot)\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} = C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}.\square\end{aligned}$$

4.4 Aplicaciones

1. Inclusión continua $H^p_{max}(\mathbb{Z}) \subset H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})$

El Teorema 2.9 prueba la equivalencia de los espacios $H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})$ y $H^p_{max}(\mathbb{Z})$ en el rango $0 < p \leq 1$. Como consecuencia de los resultados de este capítulo podemos obtener una nueva demostración de la inclusión continua $H^p_{max}(\mathbb{Z}) \subseteq H^p_{Hilb}(\mathbb{Z})$.

Tomamos en el Teorema 4.3 $\hat{K}(\xi) = -\pi\ i\ \text{sign}(\xi)$. Puesto que, para toda $f \in H^p(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se verifica que

$$\|Hf\|_p \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R})},$$

obtenemos que para cualquier sucesión $a \in H^p_{max}(\mathbb{Z})$,

$$\|(H\varphi)^d \star a\ \|_p \leq C\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z})}, \tag{4.19}$$

para toda φ en las condiciones del Teorema 4.3. Si escogemos la función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap E_R$, con la condición $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero, el Lema 2.3 nos asegura que

$$\|H^d a\|_p \leq C(\|a\|_p + \|(H\varphi)^d \star a\|_p).$$

De esta desigualdad, junto con (4.19), obtenemos

$$\|H^d a\|_p \leq C\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z})},$$

que nos proporciona la inclusión a la que hacíamos referencia.

2. Discretizados de operadores asociados a multiplicadores de Bochner-Riesz

Un ejemplo interesante lo constituye la versión discreta de los operadores asociados a los multiplicadores de Bochner-Riesz de orden α, es decir, $m^\alpha(\xi) = \hat{K^\alpha}(\xi) = (1-|\xi|^2)^\alpha$, si $|\xi| < 1$, $\hat{K^\alpha}(\xi) = 0$, si $|\xi| \geq 1$. Es conocido ([STW]) que m^α es un multiplicador de Fourier en $H^p(\mathbb{R}^N)$ en el rango $2N/(N+1+2\alpha) < p \leq 1$, $\alpha > (N-1)/2$.

Como hemos comentado en la Proposición 4.7, puesto que m^α es de soporte compacto, es posible encontrar φ en las condiciones del Teorema 4.1 que además cumpla $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero. De esta forma, para $t_0 > 0$ suficientemente grande, $K^\alpha_{t_0} * \varphi$ coincide con $K^\alpha_{t_0}$.

En este caso, (ver [St3], pág.390)

$$K^\alpha_{t_0}(x) = \frac{1}{t_0^N} K^\alpha \left(\frac{x}{t_0}\right) = \pi^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha) t_0^{-(N/2)+\alpha}\ |x|^{-(N/2)-\alpha} J_{(N/2)+\alpha}(2\pi|x|/t),$$

donde Γ es la función gamma de Euler y J_k denota a la función de Bessel de orden k, $k > -1/2$, definida por

$$J_k(r) = \frac{(r/2)^k}{\Gamma\left(k + (1/2)\right)\pi^{1/2}} \int_{-1}^{1} e^{irt}\ (1-t^2)^{k-(1/2)}\ dt.$$

Por tanto, el Teorema 4.1 implica, en este caso, que el operador discreto

$$a \longrightarrow \left\{ \frac{1}{t_0^{\frac{N}{2}-\alpha}} \sum_{n\neq 0} \frac{J_{\frac{N}{2}+\alpha}(2\pi|n|/t_0)}{|n|^{\frac{N}{2}+\alpha}} a(m-n) \right\}_{m\in\mathbb{Z}^N},$$

es acotado en $H^p(\mathbb{Z}^N)$, si $2N/(N+1+2\alpha) < p \leq 1$ y $\alpha > (N-1)/2$.

3. Operadores maximales en $H^p(\mathbb{Z}^N)$

Como consecuencia de la descomposición atómica de los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ ([Cf], [L], [W]) se obtiene que para toda funcion Φ nula en infinito y satisfaciendo

$$(4.20) \qquad |D^\alpha \Phi(x)| \leq A(1+|x|)^{-M}, \text{ con } |\alpha| = [N(1/p-1)]+1 \text{ y } Mp > N,$$

se verifica que $\|\sup_{t>0} |\Phi_t * f|\|_p \leq C\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}$.

En particular (4.20) se verifica para toda $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Por ello, como aplicación del Teorema 4.3 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.9 *Sea* $0 < p \leq 1$ *y* $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *El operador maximal discreto con núcleo* Φ_t^d *envía* $H^p(\mathbb{Z}^N)$ *en* $l^p(\mathbb{Z}^N)$, *es decir, existe una constante* $C > 0$, *independiente de* a, *tal que*

$$\|\sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a|\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. Tomamos en el Teorema 4.3 $K = \Phi$ y deducimos que para toda sucesión $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$,

$$(4.21) \qquad \|\sup_{t>0} |\Phi_t^\varphi \star a|\|_p \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Con una demostración análoga a la del Lema 3.2, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \cap E_R$ tal que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero, obtenemos que

$$\{(\Phi_t * \varphi)(n) - \Phi_t(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}} \in l^p(\mathbb{Z}^N).$$

Y, como consecuencia de (4.21) se verifica que

$$\|\sup_{t>0} |\Phi_t^d \star a|\|_p \leq C(\|a\|_p + \|\sup_{t>0} |\Phi_t^\varphi \star a|\|_p) \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \cdot \square$$

Capítulo 5

Espacios de Hardy discretos en dimensión superior

En el Capítulo 3, generalizamos la caracterización maximal de $H^p(\mathbb{Z})$ en términos del discretizado del núcleo de Poisson al caso de diversas variables, a partir de dicha caracterización se establecieron varios resultados que relacionaban los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ y $H^p(\mathbb{Z}^N)$ mediante funciones de tipo exponencial. Al igual que ocurre en el caso unidimensional, el hecho de que $\mathbb{Z}^N$ constituya un ejemplo clásico de espacio de tipo homogéneo deja abierta la cuestión sobre la equivalencia de los espacios $H^p(\mathbb{Z}^N)$ atómicos introducidos por Coifman y Weiss en [CW2] con otras posibles caracterizaciones que puedan darse. Con este fin, en el presente capítulo reproduciremos el esquema desarrollado en el Capítulo 2 para el caso de una variable.

En primer lugar, se introduce la definición de los espacios $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos de las transformadas de Riesz discretas (espacios $H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)$). El hecho de que los operadores transformadas de Riesz caractericen a los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ únicamente en el rango $(N-1)/N < p \leq 1$, tiene como consecuencia que la equivalencia de los espacios $H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)$ con los ya introducidos en términos del operador maximal sólo sean válidos en este rango. Esta equivalencia se demostrará en el Teorema 5.9.

Con demostraciones análogas a las expuestas en el caso de una dimensión, probamos la equivalencia de los espacios anteriores con los dados por otras caracterizaciones maximales, en las que se sustituye el núcleo de Poisson discreto, por la restricción a $\mathbb{Z}^N$ de las funciones Φ_t con $\Phi \in \mathcal{S}$ (Teorema 5.11). Asimismo, se dan dos caracterizaciones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ consistentes en la acotación en l^p de funciones de área en versiones continua y discreta (Teoremas 5.13 y 5.15).

Utilizando la caracterización maximal de $H^p(\mathbb{Z}^N)$, se obtiene un resultado análogo al demostrado en el caso de una variable que permite construir funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ a partir de una combinación, con coeficientes en $H^p(\mathbb{Z}^N)$, de trasladadas según N-plas enteras de una función localmente integrable de soporte compacto (Teorema 5.16). Dicho teorema nos permitirá extender la equivalencia del espacio $H^p(\mathbb{Z}^N)$ clásico, definido en términos de átomos, con las nuevas definiciones introducidas en el presente capítulo (Teoremas 5.18 y 5.23).

La técnicas empleadas para obtener la descomposición atómica están basadas en la idea llevada a cabo en una dimensión, si bien la dificultad a la hora de generalizar la construcción de las funciones que sustituyen a los splines B_k en el caso multidimensional nos llevan a incluir una nueva demostración, que al particularizarla al caso $N = 1$ da una prueba más simple de cómo obtener la descomposición atómica de $H^p(\mathbb{Z})$. A pesar de ello, se ha optado por mantener la demostración en una variable, recogida en el Teorema 2.26 y preliminares (ver [BC]), para constatar que las propiedades requeridas para las funciones auxiliares C_k (ver Lema 5.21), no son más que una generalización de las que verifican los splines B_k de una variable, cuya aparición en este contexto resultó ser más natural.

5.1 Caracterización en términos de las transformadas de Riesz discretas

Para $1 \le j \le N$, consideramos los operadores transformadas de Riesz, definidos mediante

$$R_j(f) = f * R_j, \quad \text{donde} \quad \hat{R}_j(\xi) = -i\, C_N \frac{\xi_j}{|\xi|}, \quad R_j(x) = \frac{x_j}{|x|^{N+1}}$$

con $C_N = \pi^{(N+1)/2}/\Gamma((N+1)/2)$.

El siguiente teorema, probado por A. Miyachi caracteriza los espacios de Hardy en $\mathbb{R}^N$ en términos de estos operadores.

Teorema 5.1 ([Mi]) *Sea $(N-1)/N < p \le 1$. Entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap H^p(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si f y $R_j(f) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \le j \le N$; y existen constantes C_1 y*

C_2 dependiendo de p y N tales que

$$C_1\left(\|f\|_p+\sum_{j=1}^{N}\|R_jf\|_p\right)\le\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)}\le C_2\left(\|f\|_p+\sum_{j=1}^{N}\|R_jf\|_p\right).$$

Consideramos la restricción a las N-plas de coordenadas enteras del núcleo de convolución que define la transformada de Riesz de orden j en $\mathbb{R}^N$,

$$R_j^d(m)=\frac{m_j}{|m|^{N+1}},\quad \text{para } 1\le j\le N,\ \text{si } m=(m_1,\cdots,m_N)\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\},$$

y $R_j(0)=0$. Definimos los operadores transformadas discretas de Riesz de orden j, R_j^d, como los operadores de convolución discretos de núcleo R_j^d, es decir, dada la sucesión a,

$$(R_j^da)(m)=(R_j^d\star a)(m)=\sum_{n\neq m}a(n)\frac{m_j-n_j}{|m-n|^{N+1}}.$$

De manera análoga a la caracterización del espacio $H^p(\mathbb{Z})$ en términos de la transformada discreta de Hilbert recogida en el Capítulo 2, podemos dar la siguiente definición de los espacios de Hardy en $\mathbb{Z}^N$, a partir de la acotación en l^p de los operadores transformada discreta de Riesz.

Definición 5.2 *Si $0<p\le 1$, definimos el espacio*

$$H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)=\{a\in l^p(\mathbb{Z}^N)\ \textit{tales que}\ R_j^da\in l^p(\mathbb{Z}^N),\quad \textit{para todo}\ 1\le j\le N\}$$

con la $p-$norma asociada, $\|a\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)}=\|a\|_p+\sum_{j=1}^{N}\|R_j^da\|_p$.

De cara a demostrar la equivalencia de esta definición con la ya introducida en el Capítulo 3 en términos del núcleo de Poisson, resultado recogido en el Teorema 5.9, necesitamos los siguientes lemas sobre los operadores transformadas de Riesz en $\mathbb{R}^N$.

Lema 5.3 *Sea α un multiíndice tal que $|\alpha|=k$, se cumple*

$$|D^\alpha R_j(y)|=O\left(\frac{1}{|y|^{N+k}}\right).$$

Demostración. Puesto que el núcleo $R_j(x) = \dfrac{x_j}{|x|^{N+1}}$ es una función homogénea de orden $-N$, la derivada parcial $D^\alpha R_j$ con $|\alpha| = k$ es una función homogénea de orden $-(N+k)$.

Por tanto, si escribimos $y = y'|y|$ con $|y'| = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, tenemos que

$$|D^\alpha R_j(y)| = |D^\alpha R_j(y'|y|)| = |y|^{-(N+k)}|D^\alpha R_j(y')| = O\left(|y|^{-(N+k)}\right).\square$$

Lema 5.4 *Si por $P_k[R_j,\ x]\ (h)$ denotamos al polinomio de Taylor de R_j de orden k, en el punto $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ evaluado en $h = (h_1, \cdots, h_N)$. Se verifica que*

$$|R_j(x+h) - P_k[R_j,\ x]\ (x+h)| \leq C\frac{|h|^{k+1}}{|x|^{N+k+1}}, \quad si\ |h| \leq \frac{1}{2}|x|.$$

Demostración. Usamos la expresión del resto en el polinomio de Taylor, para deducir que para $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} |R_j(x+h) - P_k[R_j,\ x]\ (x+h)| &= \frac{1}{(k+1)!}\left|\sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha R_j(x+(1-t)h)\ h^\alpha\right| \\ &\leq C\frac{|h|^{k+1}}{|x|^{N+k+1}}. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad es consecuencia del lema anterior debido a que

$$|x+(1-t)h| \geq |x| - (1-t)|h| \geq |x| - (1-t)\frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{2}.\ \square$$

Lema 5.5 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Si para $t > 0$, $\varphi_{1/t}(z) = t^N\varphi(tz)$, se verifica que para todo entero $k \geq 1$*

1. *Si* $|z| \geq \delta > 0$, $|\varphi_{1/t}(z)| = O\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$.

2. $\displaystyle\int_{|z|\geq\delta} |\varphi_{1/t}(z)|\ dz = O\left(\frac{1}{t^k}\right)$.

Demostración. Por ser $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tenemos que para cualquiera que sea M natural tal que $k = M - N \geq 1$, si $|z| \geq \delta > 0$

$$|\varphi_{1/t}(z)| = t^N|\varphi(tz)| \leq \frac{Ct^N}{(1+|tz|)^M} = O\left(\frac{1}{t^{M-N}}\right).$$

Asimismo,

$$\int_{|z|\geq\delta} |\varphi_{1/t}(z)|\ dz \leq \int_{|z|\geq\delta} \frac{Ct^N}{(1+t|z|)^M}\ dz = C\int_{|u|\geq\delta t} \frac{du}{(1+|u|)^M} = O\left(\frac{1}{t^{M-N}}\right).\square$$

Proposición 5.6 *Sea* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, dx = 1$*, entonces*

$$|R_j \varphi_{1/t}(x') - R_j(x')| \leq \frac{C}{t},$$

uniformemente en $x' \in \Sigma_{N-1}$ *(esfera* $N-1$ *dimensional).*

Si además se verifica que existe un entero $k \geq 2$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}^N} x^\alpha \varphi(x) \, dx = 0$*, para todo multiíndice* α *tal que* $1 \leq |\alpha| \leq k-1$*, entonces*

$$|R_j \varphi_{1/t}(x') - R_j(x')| \leq \frac{C}{t^k},$$

uniformemente en $x' \in \Sigma_{N-1}$*.*

Demostración. Asociamos a la función φ el entero $k \geq 1$ como en el enunciado, entendiendo que si $k = 1$ la hipótesis sobre φ es, exclusivamente, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, dx = 1$.

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, y $x' \in \Sigma_{N-1}$,

$$\begin{aligned} R_j f(x') &= \int_{|y| \leq 2/3} R_j(y) \left(\frac{f(x'-y) - f(x'+y)}{2} \right) dy \\ &+ \int_{|y| > 2/3} R_j(y) \, f(x'-y) \, dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio,

$$|I_1| \leq \int_{|y| \leq 2/3} \frac{C}{|y|^N} |\nabla f(z(y))| \, |y| \, dy,$$

donde $z(y) \in [x'-y, x'+y]$. Si $f = \varphi_{1/t}$, $|\nabla(\varphi_{1/t})(z)| = t|\Psi_{1/t}(z)|$, donde $\Psi = |\nabla \varphi|$. Puesto que $z(y) \in [x'-y, x'+y] \subset B(x', 2/3) \subset B(0, 1/3)^c$, tenemos que $|z(y)| \geq 1/3$. Por tanto, por el Lema 5.5, deducimos que,

$$|I_1| \leq \int_{|y| \leq 2/3} \frac{C}{|y|^{N-1}} \, O\left(\frac{1}{t^k}\right) \, dy \leq C \, O\left(\frac{1}{t^k}\right).$$

Respecto a I_2, se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|y| > 2/3, \ |x'-y| \leq |y|/2} R_j(y) \, \varphi_{1/t}(x'-y) \, dy \\ &+ \int_{|y| > 2/3, \ |x'-y| > |y|/2} R_j(y) \, \varphi_{1/t}(x'-y) \, dy = I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Para I_4 usamos que $|R_j(y)| \leq C$ sobre $|y| > 2/3$ y el Lema 5.5 aplicado a φ, lo cual implica que

$$|I_4| \leq \int_{|y|>2/3,\ |x'-y|>|y|/2} C\ |\varphi_{1/t}(x'-y)|\ dy \leq C \int_{|z|>1/3} |\varphi_{1/t}(z)|\ dz = O\left(\frac{1}{t^k}\right).$$

A continuación, estimamos $I_3 - R_j(x')$ usando las hipótesis sobre la función φ, de forma que

$$\begin{aligned} I_3 - R_j(x') &= \int_{|y|>2/3,\ |x'-y|\leq|y|/2} R_j(y)\ \varphi_{1/t}(x'-y)\ dy \\ &- \sum_{0\leq|\alpha|\leq k-1} \frac{1}{|\alpha|!}\frac{\partial^\alpha R_j}{\partial x^\alpha}(x') \int_{\mathbb{R}^N} (y-x')^\alpha \varphi_{1/t}(x'-y)\ dy \\ &= \int_{|y|>2/3,\ |x'-y|\leq|y|/2} (R_j(y) - P_{k-1}[R_j, x'](y))\, \varphi_{1/t}(x'-y)\ dy \\ &- \sum_{0\leq|\alpha|\leq k-1} \frac{1}{|\alpha|!}\frac{\partial^\alpha R_j}{\partial x^\alpha}(x') \int_{|y|<2/3\ \cup\ |x'-y|>|y|/2} (y-x')^\alpha \varphi_{1/t}(x'-y)\ dy \\ &= I_5 - \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} I_6. \end{aligned}$$

Para cada término en I_6, usamos que

$$\left|\frac{\partial^\alpha R_j}{\partial x^\alpha}(x')\right| \leq C,$$

uniformemente en $x' \in \Sigma_{N-1}$, y tenemos en cuenta que si $|y| < 2/3$, $1/3 \leq |x'-y| \leq 5/3$, por lo que debido al Lema 5.5,

$$\int_{|y|<2/3} |y-x'|^{|\alpha|}|\varphi_{1/t}(x'-y)|\ dy \leq C\int_{|z|\geq 1/3} |\varphi_{1/t}(z)|\ dz = O\left(\frac{1}{t^k}\right).$$

Por otro lado, si $|x'-y| > |y|/2$ y $|y| > 2/3$, tenemos que $|x'-y| > 1/3$, con lo cual,

$$\int_{|x'-y|>|y|/2} |y-x'|^{|\alpha|}|\varphi_{1/t}(x'-y)|\ dy \leq C\int_{|z|\geq 1/3} \frac{|z|^{|\alpha|}t^N}{(1+|z|t)^M}\ dz = O\left(\frac{1}{t^k}\right),$$

donde hemos tomado $M = N + |\alpha| + k$.

Para estimar I_5, usamos el Lema 5.4 y el decaimiento de la función φ, para obtener que

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq \int_{|y|>2/3,\ |x'-y|\leq|y|/2} C|y-x'|^k\ \frac{t^N}{(1+t|x'-y|)^M}\ dy \\ &\leq \frac{1}{t^k}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{t^N}{(1+t|x'-y|)^{M-k}}\ dy = O\left(\frac{1}{t^k}\right). \square \end{aligned}$$

Corolario 5.7 *Si* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *y* $k \geq 1$ *son como en la proposición anterior,*

$$(R_j\varphi)(x) = R_j(x) + O\left(\frac{1}{|x|^{N+k}}\right),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Demostración. Si $x' = \frac{x}{|x|} \in \Sigma_{N-1}$, basta observar que

$$(R_j\varphi)(x) = |x|^{-N} R_j\varphi_{\frac{1}{|x|}}(x'),$$

y que, como consecuencia de la proposición anterior,

$$R_j\varphi_{\frac{1}{|x|}}(x') - R_j(x') = O\left(\frac{1}{|x|^k}\right).$$

De aquí que,

$$(R_j\varphi)(x) - R_j(x) = |x|^{-N}\left(R_j\varphi_{\frac{1}{|x|}}(x') - R_j(x')\right) = O\left(\frac{1}{|x|^{N+k}}\right).\square$$

Recordamos, a continuación, la caracterización maximal de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos del núcleo de Poisson discreto, presentada en el capítulo anterior y probamos la equivalencia de dicha caracterización con la introducida vía la acotación en $l^p(\mathbb{Z}^N)$ de las transformadas de Riesz discretas.

Definición 5.8 *Definimos para todo* $0 < p < \infty$, *el espacio*

$$H^p_{max}(\mathbb{Z}^N) = \left\{a \in l^p(\mathbb{Z}^N) \text{ tales que } \sup_{t>0} |P_t \star a| \in l^p(\mathbb{Z}^N)\right\},$$

con la p*-norma asociada,*

$$\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z}^N)} = \|a\|_p + \|\sup_{t>0} |P^d_t \star a|\|_p.$$

Teorema 5.9 *Sea* $(N-1)/N < p \leq 1$, *entonces, las* p*-normas* $\|\cdot\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)}$ *y* $\|\cdot\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z}^N)}$ *son equivalentes. Es decir, para toda sucesión* a, *existen constantes* C_1 *y* C_2 *tales que*

$$C_1\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z}^N)} \leq \|a\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)} \leq C_2\|a\|_{H^p_{max}(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. Veamos la primera de las desigualdades. Tomamos $a \in H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)$ y φ como en el Lema 3.2, que sea además radial y de tipo exponencial E_R con $R < 1/2$. Construimos la función

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ \varphi(x-n) \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap E_R.$$

Mediante el teorema de inversión de Fourier, se verifica que si $1 \leq j \leq N$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
(R_j g)(x) &= \left(-i\ C_N \frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{g}(\xi)\right)^{\vee}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -i\ C_N \frac{\xi_j}{|\xi|} \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ e^{-2\pi i n\cdot\xi}\ \hat{\varphi}(\xi)\ e^{2\pi i x\cdot\xi}\ d\xi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n) \int_{\mathbb{R}^N} -i\ C_N \frac{\xi_j}{|\xi|}\ \hat{\varphi}(\xi)\ e^{2\pi i(x-n)\cdot\xi}\ d\xi \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ (R_j\varphi)(x-n)\cdot \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Usando el Corolario 5.7 obtenemos que, para todo natural $k \geq 1$ dependiendo de φ, si $m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$,

$$(R_j\varphi)(m) = R_j(m) + O\left(\frac{1}{|m|^{N+k}}\right)\cdot$$

Puesto que φ es radial, $R_j\varphi(0) = 0$. Por tanto, a partir de (5.1) y la estimación anterior en la cual basta tomar $k > N(1/p - 1)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|(R_j g)^d - R_j^d a\,\|_p^p &\leq C \sum_m \left(\sum_{n\neq m} |a(n)| \frac{1}{|m-n|^{N+k}}\right)^p \qquad (5.2)\\
&\leq C \sum_m \left(\sum_{n\neq m} |a(n)|^p \frac{1}{|m-n|^{(N+k)p}}\right) \leq C\|a\|_p^p.
\end{aligned}$$

Como consecuencia de esta estimación y el Lema 1.3 aplicado a la función de tipo exponencial $R_j g$, podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \|R_j g\|_p &\leq C \sum_{j=1}^N \|(R_j g)^d\|_p \leq C\left(\|a\|_p + \sum_{j=1}^N \|R_j^d a\|_p\right) \qquad (5.3)\\
&= C\|a\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)}\cdot
\end{aligned}$$

Puesto que $a \in H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N) \subset l^p \subset l^1$ y $P_t \in L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada a la sucesión de sumas parciales que define la función g para poder integrar término a término al calcular $P_t * g$ y escribir que, para todo $t > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(P_t * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} a(n)\ (P_t * \varphi)(x-n).$$

Notamos por $P_t^\varphi = P_t * \varphi$. El Lema 3.2 implica que

$$\|\sup_{t>0} |P_t \star a|\|_p \leq C(\|a\|_p + \|\sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a|\|_p).$$

Como consecuencia del Lema 1.5, se verifica que

$$\|\sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a|\|_p = \|\sup_{t>0} |(P_t * g)^d|\|_p \leq C\|\sup_{t>0} |P_t * g|\|_p.$$

Puesto que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos usar el Teorema 5.1 en el rango $(N-1)/N < p \leq 1$ y deducir que

$$\|\sup_{t>0} |P_t * g|\|_p \leq C\left(\|g\|_p + \sum_{j=1}^N \|R_j g\|_p\right) \leq C\|a\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)}.$$

Esta última desigualdad es consecuencia de (5.3), y de que

$$\|g\|_p \leq C\|a\|_p \leq C\|a\|_{H^p_{Riesz}(\mathbb{Z}^N)}.$$

Para la prueba de la desigualdad contraria, observamos que como consecuencia de (5.2), el Lema 1.2 aplicado a cada función de tipo exponencial $R_j g$ y de nuevo el Teorema 5.1,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \|R_j^d a\|_p &\leq \sum_{j=1}^N \|(R_j g)^d\|_p + C\|a\|_p \leq \sum_{j=1}^N \|R_j g\|_p + \|a\|_p \\ &\leq \|a\|_p + \|\sup_{t>0} |P_t * g|\|_p.\end{aligned}$$

Ahora, como consecuencia del Lema 1.6, tenemos que

$$\|\sup_{t>0} |P_t * g|\|_p \leq C\|\sup_{t>0} |(P_t * g)^d\|_p = C\|\sup_{t>0} |P_t^\varphi \star a|\|_p.$$

Esta desigualdad y el Lema 3.2 nos permite finalizar la prueba del Teorema. □

5.2 Otras caracterizaciones maximales y en términos de funciones de área

Haciendo uso de las mismas técnicas que en el Teorema 5.9, podemos mostrar otras caracterizaciones de los espacios $H^p(\mathbb{Z}^N)$. Por ejemplo, al igual que en el caso unidimensional y en analogía a lo que ocurre en $\mathbb{R}^N$, el núcleo $\{P_t^d(n)\}_n$ puede sustituirse por $\{\Phi_t^d(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N}$ donde $\Phi_t^d(n) = t^{-N}\Phi(n/t)$ si $n \neq 0$, $\Phi_t^d(0) = 0$ con $\Phi \in \mathcal{S}$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \Phi = 1$.

Revisando la prueba del Lema 3.2, observamos que las condiciones de regularidad sobre la función $H_t(\xi)$, se verifican si el núcleo de Poisson P, es sustituido por una función $\Phi \in \mathcal{S}$. Dicho resultado, forma parte del siguiente lema auxiliar útil para probar la caracterización de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ mediante otras funciones maximales.

Lema 5.10 *Sea Φ y $\varphi \in \mathcal{S}$ tales que $\hat{\varphi} \equiv 1$ en un entorno de cero $(-\epsilon, \epsilon)^N$. Para todo $0 < p < \infty$, se verifica*

(a)

$$\left\{\sup_{t>0} |(\Phi_t^{\varphi})(n) - (\Phi_t)(n)|\right\}_{n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}} \in l^p(\mathbb{Z}^N)$$

(b) Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Phi = 0$ y $\varphi \in E_R$, existe $\phi(t) \in L^2([0,\infty), \frac{dt}{t})$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$

$$|(\Phi_t^{\varphi})(n) - (\Phi_t)(n)| = \phi(t)C(n),$$

con $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}} \in l^p(\mathbb{Z}^N)$.

Demostración. Puesto que la prueba del apartado (a) del lema es análoga a la del Lema 3.2 nos centraremos en la prueba de (b).

Si denotamos por $H_t(\xi) = \hat{\Phi}(\xi t)(\hat{\varphi}(\xi) - 1)$, mediante el mismo razonamiento y haciendo uso de la misma notación que en el Lema 3.2, obtenemos que

$$\begin{aligned}
(\Phi_t^{\varphi})(n) - \Phi_t(n) &= \int_{[-R,R]^N} H_t(\xi)\, e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^N\setminus[-R,R]^N} \hat{\Phi}(\xi t)\, e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^{|j|} n_{i_1}^{j_1}\cdots n_{i_k}^{j_k}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^j H_t}{\partial \xi^j}(\xi)\, e^{2\pi i n\cdot\xi}\, d\xi \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^N\setminus[-R,R]^N} \frac{\partial^j(\hat{\Phi}(t\cdot))}{\partial\xi^j}(\xi)\, e^{2\pi i n\cdot\xi} \Big).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Tomando el multiíndice j tal que cada cada $j_i \geq [1/p] + 1$ para $1 \leq i \leq N$, se obtiene la condición de $p-$sumabilidad para la sucesión $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}}$.

Veamos la existencia de la función ϕ. Puesto que $\displaystyle\int \Phi = 0$, se verifica que $|\hat{\Phi}(\xi)| \leq A|\xi|$ y, por tanto, si $\xi \in [-R,R]^N \setminus (-\epsilon,\epsilon)^N$, los factores

$$\hat{\Phi}(t\xi)\frac{\partial^j\left(\hat{\varphi}(\cdot)-1\right)}{d\xi^j}(\xi),$$

que aparecerán en la primera de las integrales de (5.4), puede acotarse mediante

$$\left|\hat{\Phi}(t\xi)\frac{\partial^j(\hat{\varphi}(\cdot)-1)}{\partial\xi^j}(\xi)\right| \leq \begin{cases} At|\xi| & \leq CtR \quad \text{si } 0<t<1 \\ \frac{C}{(1+t|\xi|)^M} & \leq \frac{C}{(1+t\epsilon)^M} \quad \text{si } t\geq 1, \end{cases}$$

para M suficientemente grande.

Por otro lado, si k denota un multiíndice de orden $|k| \geq 1$ y m un multiíndice de manera que $|k|+|m| = |j|$, para $\xi \in [-R,R]^N \setminus (-\epsilon,\epsilon)^N$, podemos acotar los factores que contienen derivadas de orden $|k|$ mediante,

$$\left|t^{|k|}\frac{\partial^k\hat{\Phi}}{\partial\xi^k}(t\xi)\ \frac{\partial^m(\hat{\varphi}(\cdot)-1)}{\partial\xi^m}\right| \leq \frac{Ct^{|k|}}{(1+t|\xi|)^M} \leq \frac{Ct^{|k|}}{(1+t|\epsilon|)^M}.$$

La segunda integral en (5.4) contiene derivadas de la función $\hat{\Phi}(t\cdot)$ de orden $|j| \geq N + N[1/p]$, que podemos acotar mediante la expresión

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus[-R,R]^N}\left|\frac{\partial^j\hat{\Phi}(t\cdot)}{\partial\xi^j}\right|(\xi)\,d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus[-R,R]^N}\frac{Ct^{|j|}}{(1+t|\xi|)^M}\,d\xi \\ &\leq \frac{C}{t^{N-|j|}}\frac{1}{(1+tR)^{M-N}} \in L^2((0,\infty),dt/t).\end{aligned}$$

Utilizando estas estimaciones en la ecuación (5.4), podemos encontrar una función $\phi(t)$ en las condiciones del enunciado. □

La parte (a) del lema anterior tiene como consecuencia el siguiente resultado.

Teorema 5.11 *Sean $0<p\leq 1$ y $\Phi \in \mathcal{S}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N}\Phi = 1$. Entonces,*

$$\|a\|_p + \|\sup_{t>0}|\Phi_t^d \star a|\ \|_p \sim \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Asimismo, la parte (b) del Lema 5.10 nos permite dar caracterizaciones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos de funciones de área.

Definición 5.12 *Si $0 < p \leq 1$, definimos el espacio*

$$H^p_A(\mathbb{Z}^N) = \left\{a \in l^p(\mathbb{Z}^N) \text{ tales que } \left\{\|(\Psi^d_t \star a)(n)\|_{2,\frac{dt}{t}}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^N} \in l^p(\mathbb{Z}^N)\right\}$$

con la p-norma

$$\|a\|_{H^p_A(\mathbb{Z}^N)} = \|a\|_p + \|\ \|\Psi^d_t \star a\|_{2,\frac{dt}{t}}\ \|_p.$$

donde Ψ^d_t denota la restricción a $\mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ de $\Psi_t(\cdot) = t^{-N}\Psi(\cdot/t)$, siendo $\Psi \in \mathcal{S}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \Psi = 0$, $\Psi^d_t(0) = 0$.

La norma mixta $\|\ \|\Psi^d_t \star a\|_{2,\frac{dt}{t}}\ \|_p$ representa, por tanto, a la expresión

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^N}\left(\int_0^\infty\left|\sum_{m\neq 0}\Psi_t(m)a(n-m)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usando la parte (b) del Lema 5.10 junto con los Lemas 1.5 y 1.6 en el caso $q = 2$, obtenemos la siguiente equivalencia de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos de funciones de área.

Teorema 5.13 *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces, $a \in H^p_A(\mathbb{Z}^N)$ si y sólo si $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Es más,*

$$H^p(\mathbb{Z}^N) \sim H^p_A(\mathbb{Z}^N).$$

De igual forma, mediante una aplicación del Lema 1.8 en el caso $q = 2$ y, de nuevo, el Lema 5.10, podemos dar la generalización a varias variables de la caracterización de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos de funciones de área discreta.

Definición 5.14 *Sea $\Psi \in \mathcal{S}$ tal que sop $\hat{\Psi} \subset \{\xi;\ 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ y $|\hat{\Psi}(\xi)| \geq C > 0$ si $3/5 \leq |\xi| \leq 5/3$. Notamos por $\Psi^d_m = \{\Psi^d_{2^m}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^N}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.*

Si $0 < p \leq 1$, definimos el espacio

$$H^p_{Ad}(\mathbb{Z}^N) = \left\{a \in l^p(\mathbb{Z}^N);\ \left\|\left(\sum_{m\geq 0}|(\Psi^d_m \star a)|^2\right)^{1/2}\right\|_p < \infty\right\},$$

con la p-norma

$$\|a\|_{H^p_{Ad}(\mathbb{Z}^N)} = \|a\|_p + \left\|\left(\sum_{m\geq 0}|(\Psi^d_m \star a)|^2\right)^{1/2}\right\|_p.$$

Teorema 5.15 *Sea* $0 < p \leq 1$. *Entonces,* $a \in H^p_{Ad}(\mathbb{Z}^N)$ *si y sólo si* $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. *Además,*

$$H^p(\mathbb{Z}^N) \sim H^p_{Ad}(\mathbb{Z}^N).$$

Análogamente al caso de dimensión 1 (Teorema 2.17), podemos probar que la combinación, con coeficientes en $H^p(\mathbb{Z}^N)$, de trasladadas según N-plas enteras de una función Φ de soporte compacto localmente integrable resulta ser una función de $H^p(\mathbb{R}^N)$. Para ello, utilizaremos la caracterización maximal de los espacios $H^p(\mathbb{R}^N)$ con núcleo una función $\Psi \in \mathcal{S}$ con sop $\Psi \subset B(0,1)$.

Teorema 5.16 *Sea* $0 < p \leq 1$ *y* $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. *Si* ϕ *es una función de* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *tal que sop* $\phi \subset \{|x| \leq A\}$, *la función*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n)\phi(x-n) \in H^p(\mathbb{R}^N),$$

y además, existe una constante $C = C(p,N)$ *de forma que*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. Hemos de estimar $\|\sup_{t>0} |\Psi_t * f|\|_p$. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned}
\|\sup_{t>0} |\Psi_t * f|\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n)\Psi_t(x-y)\ \phi(x-n)\ dy \right|^p dx \\
= &\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_t(x-y) \left(\sum_{|n-m| \leq C_0} + \sum_{|n-m|>C_0} \right) (a(n)\phi(x-n))\ dy \right|^p dx \\
\leq &\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \left| \sum_{|n-m| \leq C_0} a(n) \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_t(x-y)\ \phi(y-n))\ dy \right|^p dx \\
+ &\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|n-m|>C_0} a(n)\phi(y-n) \Big(\Psi_t(x-y) \\
&\qquad - P_{N_0}[\Psi_t, m-n](x-y) \Big)\ dy \Big|^p dx \\
+ &\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|n-m|>C_0} a(n)\phi(y-n) P_{N_0}[\Psi_t, m-n](x-y)\ \ dy \right|^p dx \\
= &\ (\mathrm{I}) +\ (\mathrm{II}) +\ (\mathrm{III}),
\end{aligned}$$

donde $P_{N_0}[\Psi_t, m-n](x-y)$, denota al polinomio de Taylor de grado $N_0 = [N(1/p-1)]$ de la función Ψ_t en el punto $m-n$ y evaluado en $x-y$.

Por ser $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, la función maximal $\sup_{t>0} |\Psi_t * \phi|$ es localmente integrable y podemos estimar (I) como

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \left| \sum_{|n-m|\le C_0} a(n)(\Psi_t * \phi)(x-n) \right|^p dx \\
&\le \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \sum_{|m-n|\le C_0} |a(n)|^p \int_{m-n+[0,1)^N} \sup_{t>0} |\Psi_t * \phi|^p(x)\, dx \\
&= C\|a\|_p^p.
\end{aligned}$$

Para estimar (II), observamos que para cualquier multiíndice α tal que $|\alpha| = N_0+1$, cualquiera que sea $M > 0$ y $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned}
&|D^\alpha \Psi_t(m-n-\theta(x-y-m+n))\ (x-y-m+n)^\alpha| \\
&\le Ct^{-N-N_0-1}\left(1 + \frac{|m-n-\theta(x-y-m+n)|}{t}\right)^{-M} \\
&= Ct^{M-N-N_0-1}(t+|m-n-\theta(x-y-m+n)|)^{-M}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Puesto que $x-m \in [0,1)^N$, $|y-n| \le A$ y $|m-n| > C_0$, tomando C_0 suficientemente grande, tenemos que

$$t + |n-m-\theta(x-y-m+n)| \ge C|n-m|.$$

Con lo cual, si en la estimación (5.5) tomamos $M = N + N_0 + 1$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\text{(II)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \Bigg(\int_{m+[0,1)^N} \sup_{t>0} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|n-m|>C_0} a(n)\phi(y-n) \\
\sum_{|\alpha|=N_0+1} \frac{1}{|\alpha|!} D^\alpha \Psi_t(m-n-\theta(x-y-m+n))\ (x-y-m+n)^\alpha\ dy\Big|^p \Bigg) dx \\
\le\ C \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \left(\sum_{|n-m|>C_0} \frac{|a(n)|}{|m-n|^{N+N_0+1}} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(y)|\ dy \right)^p \le C\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.
\end{aligned}$$

Asimismo, puesto que sop $\Psi \subset B(0,1)$, podemos acotar (III) mediante la estimación

$$
\begin{aligned}
\text{(III)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t\geq 1} \Big| \sum_{|n-m|>C_0} a(n) \sum_{|\alpha|=0}^{N_0} \frac{1}{|\alpha|!} \frac{1}{t^{N+|\alpha|}} (D^\alpha \Psi) \left(\frac{m-n}{t}\right) \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y)(x-m-y)^\alpha \, dy \Big|^p \, dx \\
&\leq \sum_{|\alpha|=0}^{N_0} \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \int_{m+[0,1)^N} \sup_{t\geq 1} \Big| \sum_{|n-m|>C_0} a(n) \frac{1}{|\alpha|! t^{|\alpha|}} (D^\alpha \Psi)_t (m-n) \\
&\qquad \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y)(x-m-y)^\alpha \, dy \Big|^p \, dx \\
&\leq \sum_{|\alpha|=0}^{N_0} \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \sup_{t\geq 1} \left| \sum_{|n-m|>C_0} a(n) \frac{1}{|\alpha|!} (D^\alpha \Psi)_t (m-n) \right|^p \\
&\qquad \left(\int_{[0,1)^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y)(x-y)^\alpha \, dy \right|^p \, dx \right) \leq \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)},
\end{aligned}
$$

donde hemos usado que, como consecuencia de la Proposición 4.9,

$$
\| \sup_{t\geq 1} |(D^\alpha \Psi)_t^d \star a| \|_p \leq C \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)},
$$

y de ahí que

$$
\begin{aligned}
& \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \sup_{t\geq 1} \Big| \sum_{|n-m|>C_0} a(n)(D^\alpha \Psi)_t(m-n) \Big|^p \\
& \leq \| \sup_{t\geq 1} |(D^\alpha \Psi)_t^d \star a| \|_p^p + \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \sup_{t\geq 1} \Big| \sum_{|n-m|\leq C_0} a(n)(D^\alpha \Psi)_t(m-n) \Big|^p \\
& \leq C \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)} + C\|a\|_p^p \leq C \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)} . \; \square
\end{aligned}
$$

5.3 Caracterización atómica de $H^p(\mathbb{Z}^N)$

Al igual que en el caso de una dimensión (Definición 2.18), podemos establecer la siguiente definición que caracteriza a los espacios $H^p(\mathbb{Z}^N)$ en términos de átomos, original en la literatura, al considerar $\mathbb{Z}^N$ como espacios de tipo homogéneo (ver [CW2] y [MS]).

Definición 5.17 *Para $0 < p \leq 1$, diremos que la sucesión a es un H^p átomo en $\mathbb{Z}^N$, si verifica que:*

(i) existe un cubo centrado en un punto $m_0 \in \mathbb{Z}^N$ tal que sop $a \subset Q$.

(ii) $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{(\#Q)^{1/p}}$ donde $\#Q$ representa al cardinal de Q.

(iii) $\sum n^\alpha a(n) = 0$, para todo multiíndice α, con $|\alpha| \leq N(p^{-1} - 1)$.

Definimos el espacio $H^p_{at}(\mathbb{Z}^N)$ como el conjunto de sucesiones a que admiten la descomposición

$$a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j, \tag{5.6}$$

donde cada a_j es un H^p átomo y $\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty$. Para $a \in H^p_{at}(\mathbb{Z}^N)$, definimos la p-norma

$$\|a\|_{H^p_{at}(\mathbb{Z}^N)} = \inf \left\{ \left(\sum_j |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de a de la forma (5.6).

Teorema 5.18 *Sea $0 < p \leq 1$ y $a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \in H^p_{at}(\mathbb{Z}^N)$. Se verifica que $a \in H^p(\mathbb{Z})$ y existe una constante $C > 0$, independiente de a, de forma que*

$$\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

Demostración. Para la prueba del teorema basta ver que todo H^p átomo a tiene H^p-norma acotada uniformemente por una constante C dependiente de p y N pero independiente de a. Puesto que si $a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j \in H^p_{at}(\mathbb{Z}^N)$

$$\|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \|a_j\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p.$$

Tomamos, por tanto, a un H^p átomo con soporte en un cubo Q de $\mathbb{Z}^N$ con centro $m_0 \in \mathbb{Z}^N$.

Las condiciones (i) y (ii) de la Definición 5.17 implican que

$$\|a\|_p^p = \sum_{n\in Q} |a(n)|^p \leq \#Q \left(\frac{1}{\#Q^{1/p}}\right)^p = 1.$$

Por otro lado, para estimar $\| \sup_{t>0} |P_t^d \star a\|_p$ consideraremos la descomposición

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{t>0} |P_t^d \star a|^p(n) = \sum_{n\in 2Q} \sup_{t>0} |P_t^d \star a|^p(n) + \sum_{n\notin 2Q} \sup_{t>0} |P_t^d \star a|^p(n) = S_1 + S_2,$$

donde $2Q$ representa al cubo de $\mathbb{Z}^N$ del mismo centro que Q, y cuya arista tiene cardinal $2(\#Q)^{1/N} - 1$.

Para estimar S_1, usamos la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $2/p$, $2/(2-p)$ y el hecho de que el operador maximal asociado al núcleo de Poisson discreto es acotado en l^2 (ver [AC]) para obtener que

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n\in 2Q} |\sup_{t>0} |P_t^d \star a|^p(n) \leq (2(\#Q)^{1/N} - 1)^{N(2-p)/2} \| \sup_{t>0} |P_t^d \star a\|_2^p \\ &\leq C(2(\#Q)^{1/N} - 1)^{N(2-p)/2} \|a\|_2^p = C(2(\#Q)^{1/N} - 1)^{N(2-p)/2} (\sum_{n\in Q} |a(n)|^2)^{p/2} \\ &\leq C(2(\#Q)^{1/N} - 1)^{N(2-p)/2} \#Q^{p/2} \frac{1}{\#Q} \leq C(p, N)\cdot \end{aligned}$$

Para el sumando S_2, usamos la propiedad de cancelación para un p-átomo y escribimos que, si $n \notin 2Q$ y $P_{N_0}[P_t, n - m_0](n - m)$ es igual al polinomio de Taylor de grado $N_0 = [N(1/p - 1)]$ en el punto $n - m_0$,

$$\begin{aligned} (5.7) \quad (P_t^d \star a)(n) &= \sum_{m\in Q} \frac{t}{(t^2 + |n-m|^2)^{(N+1)/2}} a(m) \\ &= \sum_{m\in Q} \left(\frac{t}{(t^2 + |n-m|^2)^{(N+1)/2}} - P_{N_0}[P_t, n - m_0](n - m) \right) a(m) \\ &= (-1)^{N_0+1} \sum_{m\in Q} a(m) \left(\sum_{|\alpha|=N_0+1} \frac{1}{|\alpha|!} (D^\alpha P_t)(n - m_0 - \theta_m(m - m_0))(m - m_0)^\alpha \right) \cdot \end{aligned}$$

Puesto que $0 \leq \theta_m \leq 1$ y que, para cada $m \in Q$ y $n \notin 2Q$, $|m - m_0| \leq \frac{|n-m_0|}{2}$, se deduce que para $|\alpha| = N_0 + 1$,

$$\begin{aligned} |(D^\alpha P_t)(n - m_0 - \theta_m(m - m_0))| &\leq C(t + |n - m_0 - \theta_m(m - m_0)|)^{-N-N_0-1} \\ &\leq \frac{C}{|n - m_0|^{N+N_0+1}}. \end{aligned}$$

A partir de esta estimación y (5.7), tenemos que para todo $n \notin 2Q$,

$$|(P_t^d \star a)(n)| \leq C \sum_{m \in Q} |a(m)| \frac{|m-m_0|^{N_0+1}}{|n-m_0|^{N+N_0+1}}$$

$$\leq \quad C(\#Q) \frac{1}{(\#Q)^{1/p}} (\#Q)^{\frac{N_0+1}{N}} \frac{1}{|n-m_0|^{N+N_0+1}} = C(\#Q)^{1-\frac{1}{p}+\frac{N_0+1}{N}} \frac{1}{|n-m_0|^{N+N_0+1}}.$$

Con lo cual, usamos que si $n \notin 2Q$, $|n-m_0| \geq C(\#Q)^{1/N}$, y deducimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \notin 2Q} \frac{1}{|n-m_0|^{(N+N_0+1)p}} &\leq \sum_{|k| \geq C(\#Q)^{1/N}} \frac{1}{|k|^{(N+N_0+1)p}} \leq C \int_{|x| \geq C(\#Q)^{1/N}} \frac{1}{|x|^{(N+N_0+1)p}}\, dx \\ &= \frac{C}{(\#Q)^{\frac{(N+N_0+1)}{N}p-1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_2 = \sum_{n \notin 2Q} |\sup_{t>0} |P_t^d \star a|^p(n) \leq C(\#Q)^{\frac{(N_0+1)}{N}p+p-1} \sum_{n \notin 2Q} \frac{1}{|n-m_0|^{(N+N_0+1)p}} = C.$$

Las estimaciones anteriores, dan como resultado que, para cierta constante $C > 0$ independiente de a,

$$\| \sup_{t>0} P_t^d \star a\|_p \leq C.$$

De lo cual se deduce el teorema. □

A la vista de la demostración de la descomposición atómica obtenida para sucesiones de $H^p(\mathbb{Z})$ en el Teorema 2.26, y con el objeto de generalizar dicha descomposición a varias variables necesitamos construir en $\mathbb{R}^N$, para cada $k = [N(1/p-1)]$, unas funciones auxiliares, $C_k(x)$, que cumplan las siguientes propiedades:

1. sop $C_k \subset [-(k+1)/2, (k+1)/2]^N = Q_k$.

2. Si k es par y $m \in \mathbb{Z}^N$, C_k es un polinomio de grado menor o igual que k sobre cada cubo de la forma $m + [-1/2, 1/2]^N$.

   En lo sucesivo, nos centraremos en el caso k entero par, en la observación posterior al Teorema 5.23, indicaremos los cambios a realizar en el caso k impar.

3. Para todo multiíndice $j \in \mathbb{N}^N$ tal que $0 \le |j| \le k$,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} m^j \; C_k(x-m) = P_j(x), \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

donde P_j es un polinomio de grado $|j|$ determinado por la condición

$$\int_{n+[-1/4,1/4]^N} P_j(x) \; dx = n^j, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^N, \tag{5.8}$$

(si $n = j = 0$, entenderemos que $n^j = 1$).

A continuación, demostramos que dicha condición determina unívocamente los polinomios P_j.

Lema 5.19 *Para cada $j \in \mathbb{N}^N$, existe un único polinomio $P_j(x)$ de grado $|j|$ que verifica (5.8).*

Demostración. Sea $P_j(x) = \sum_{|s| \le |j|} B_j^s x^s$, comprobaremos que los coeficientes $\{B_j^s\}_{|s| \le |j|}$ están unívocamente determinados. Para ello, observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{n+[-1/4,1/4]^N} P_j(x) \; dx &= \int_{[-1/4,1/4]^N} P_j(x+n) \; dx = \sum_{|s| \le |j|} B_j^s \int_{[-1/4,1/4]^N} (x+n)^s \; dx \\
&= \sum_{|s| \le |j|} B_j^s \left[\int_{[-1/4,1/4]^N} x^{s-\beta} \sum_{\beta \le s} \binom{s}{\beta} n^\beta \; dx \right] \\
&= \sum_{|s| \le |j|} B_j^s \sum_{\beta \le s} \binom{s}{\beta} n^\beta \; I_{s-\beta},
\end{aligned}$$

donde hemos notado por $I_\alpha = \int_{[-1/4,1/4]^N} x^\alpha \; dx$.

Efectuando un cambio en el orden de sumación en la ecuación anterior, observamos que el problema a resolver viene dado por las ecuaciones

$$\sum_{|\beta| \le |j|} n^\beta \left[\sum_{|s| \le |j|, s \ge \beta} \binom{s}{\beta} I_{s-\beta} B_j^s \right] = n^j.$$

Igualando coeficientes, obtenemos que si $\beta = j$,

$$I_0 B_j^j = 1 \tag{5.9}$$

y si $\beta \neq j$,

(5.10) $$\sum_{|s|\leq|j|, s\geq\beta} \binom{s}{\beta} I_{s-\beta} B_j^s = 0\cdot$$

El coeficiente B_j^j viene determinado por la ecuación (5.9). Por otro lado, si $s \geq \beta$ y $|s| \leq |\beta|$ se verifica que $s = \beta$, con lo cual si $\beta \neq j$, pero $|\beta| = |j|$, la ecuación (5.10) implica que $B_j^\beta = 0$.

Con esta observación hemos determinado todos los coeficientes B_j^β con $|\beta| = |j|$. Supongamos que hemos resuelto el sistema dado por (5.9) y (5.10), hasta encontrar los coeficientes B_j^β con $|j| - r \leq |\beta| \leq |j|$, $r \geq 0$ entero, de manera única, y veamos que los coeficientes B_j^β con $|\beta| = |j| - (r+1)$ quedan también unívocamente determinados.

Observamos que, para $|\beta| = |j| - (r+1)$, puesto que la condición $s \geq \beta$ con $|s| = |\beta|$ implica $s = \beta$, se tiene de (5.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|s|\leq|j|, s\geq\beta} \binom{s}{\beta} I_{s-\beta} B_j^s = \sum_{|j|-(r+1)\leq|s|\leq|j|, s\geq\beta} \binom{s}{\beta} I_{s-\beta} B_j^s \\ &= C_0 B_j^\beta + \sum_{|j|-r\leq|s|\leq|j|, s\geq\beta} \binom{s}{\beta} I_{s-\beta} B_j^s\cdot \end{aligned}$$

Esto prueba que el sistema dado por (5.9) y (5.10) tiene solución única. □

El siguiente lema determina con cuántas ecuaciones diferentes contamos en la condición 3.

Lema 5.20 *El número de multiíndices $j \in \mathbb{N}^N$ con $0 \leq |j| \leq k$ es igual a* $\binom{N+k}{k}$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre N. Para $N = 1$ el resultado es obvio, puesto que $k + 1 = \binom{k+1}{k}$.

Para completar la inducción observamos que si notamos por $\bar{\mathcal{J}} = \{\bar{j} \in \mathbb{N}^{N-1}$tal que $0 \leq |\bar{j}| \leq k\}$ y por $\mathcal{J} = \{j \in \mathbb{N}^N$tal que $|j| = k\}$, podemos establecer una biyección, ϕ, entre $\bar{\mathcal{J}}$ y $\mathcal{J}$, definida por

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & \bar{\mathcal{J}} \longleftarrow \mathcal{J} \\ & \bar{j} \longrightarrow (\bar{j},\ k - |\bar{j}|)\cdot \end{aligned}$$

Por tanto, según esta observación, por hipótesis de inducción, basta probar que

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{N-1+j}{j} = \binom{N+k}{k}.$$

Probaremos la fórmula anterior mediante inducción sobre k. Si $k = 0$, la igualdad se verifica trivialmente. Si suponemos que la igualdad es cierta para el entero $k-1$, para k podemos escribir

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\binom{N-1+j}{j} &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{N-1+j}{j}+\binom{N-1+k}{k}\\ &= \binom{N+k-1}{k-1}+\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k}{k}.\ \square\end{aligned}$$

El siguiente lema prueba la existencia de una función C_k cumpliendo las condiciones 1, 2 y 3 citadas anteriormente.

Lema 5.21 *Fijado P_j como en el Lema 5.19 para cada $0 \le |j| \le k$, existen funciones C_k polinómicas a trozos verificando las condiciones* 1, 2 y 3 *anteriores.*

Demostración. Notamos por $J = \{j = (j_1, \cdots, j_N) \in \mathbb{Z}^N$ tales que $|j_i| \le k/2$, $1 \le i \le N\}$. Observamos que $m \in J$ si y sólo si $m + [-1/2, 1/2]^N \subset Q_k$. Para cada $m \in J$, sea C_k^m un polinomio de grado $\le k$, a determinar, tal que

$$C_k(x) = C_k^m(x),\ x \in -m + [-1/2, 1/2]^N,$$

y escribimos

$$C_k^m(x) = \sum_{|j|\le k} A_j^m\ (x+m)^j,\ x \in -m + [-1/2, 1/2]^N, \tag{5.11}$$

con $\{A_j^m\}_{|j|\le k}$ incógnitas a determinar. Para que se cumpla la condición 3 imponemos, en primer lugar, las ecuaciones

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^N} m^j\ C_k(x-m) = P_j(x),\ x \in [-1/2, 1/2]^N. \tag{5.12}$$

Ahora bien, si $x \in [-1/2, 1/2]^N$, $x - m \in -m + [-1/2, 1/2]^N$ y por (5.11), tenemos que (5.12) es equivalente a que, para todo $0 \le |j| \le k$,

$$P_j(x) = \sum_{m\in J} m^j \left(\sum_{|s|\le k} A_s^m x^s\right) = \sum_{|s|\le k} x^s \left(\sum_{m\in J} m^j A_s^m\right),\ x \in [-1/2, 1/2]^N.$$

Escribimos como en el lema anterior $P_j(x) = \sum_{|s|\leq|j|} B_j^s x^s$, por tanto, igualando coeficientes, se ha de cumplir, fijado s multíndice tal que $|s| \leq |j|$, el siguiente sistema

$$\sum_{m\in J} m^j A_s^m = B_j^s \cdot \quad 0 \leq |j| \leq k, \tag{5.13}$$

y s es tal que $|s| > |j|$, $B_j^s = 0$.

Dado un multiíndice s, el sistema anterior tiene $(k+1)^N$ incógnitas, $\{A_s^m\}_{m\in J}$, y, según el Lema 5.20, $\binom{N+k}{k}$ ecuaciones. Puesto que el rango del sistema (5.13) coincide con el número de ecuaciones, podemos elegir un subconjunto $I \subset J \setminus \{0\}$ de cardinal $(k+1)^N$-$\binom{N+k}{k}$ de forma que

$$A_s^m = 0, \text{ para todo } m \in I \text{ y todo } |s| \leq k,$$

y determinar el resto de incógnitas unívocamente. La elección hecha implica que, para $m \in I$

$$C_k^m \equiv 0.$$

De esta forma hemos construído una función C_k que cumple las condiciones 1, 2 y (5.12). Falta ver que la igualdad (5.12) se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Ahora bien, si $x \in \mathbb{R}^N$ y $n \in \mathbb{Z}^N$ es tal que $x \in n + [-1/2, 1/2]^N$, se tiene

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^N} m^j\ C_k(x-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} (m+n)^j\ C_k(x-n-m)$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}^N} \left(\sum_{\alpha\leq j} \binom{j}{\alpha} m^\alpha\ n^{j-\alpha} \right) C_k(x-n-m) = \sum_{\alpha\leq j} \binom{j}{\alpha}\ n^{j-\alpha}\ P_\alpha(x-n),$$

donde la última igualdad es consecuencia de (5.12), ya que $x - n \in [-1/2, 1/2]^N$. Para ver que este último polinomio es igual a $P_j(x)$, según el Lema 5.19, basta con verificar (5.8). En efecto, para cada $l \in \mathbb{Z}^N$,

$$\int_{l+[-1/4,1/4]^N} \sum_{\alpha\leq j} \binom{j}{\alpha}\ n^{j-\alpha}\ P_\alpha(x-n)\ dx$$
$$= \sum_{\alpha\leq j} \binom{j}{\alpha}\ n^{j-\alpha} \int_{l-n+[-1/4,1/4]^N} P_\alpha(x)\ dx$$
$$= \sum_{\alpha\leq j} \binom{j}{\alpha}\ n^{j-\alpha}\ (l-n)^\alpha = l^j,$$

como queríamos probar. $\square$

Observación. A partir de la construcción de la función C_k, polinómica a trozos, observamos que, debido a (5.8) y a la propiedad 3

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^N}\int_{[-1/4,1/4]^N} C_k(x-m)\,dx = \int_{[-1/4,1/4]^N} P_0(x)\,dx = 1,$$

y si $1 \le |j| \le k$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^N} m^j \int_{[-1/4,1/4]^N} C_k(x-m)\,dx = \int_{[-1/4,1/4]^N} P_j(x)\,dx = 0.$$

Estas ecuaciones implican que la solución construida, C_k, verifica

$$\int_{[-1/4,1/4]^N} C_k(x)\,dx = 1, \tag{5.14}$$

$$\int_{n+[-1/4,1/4]^N} C_k(x)\,dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

Al igual que en el caso unidimensional, probaremos la descomposición atómica de las sucesiones de $H^p(\mathbb{Z}^N)$ a partir del correspondiente resultado para distribuciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$.

Recordamos (ver [L] o [CW2]) que un H^p átomo en $\mathbb{R}^N$ es una función b con soporte contenido en un cubo $Q \subset \mathbb{R}^N$ satisfaciendo

(i) la condición de tamaño: $\|b\|_\infty \le \dfrac{1}{|Q|^{1/p}}$,

(ii) la condición de cancelación: $\displaystyle\int_Q x^\alpha b(x)\,dx = 0$, para todo multiíndice α tal que $0 \le |\alpha| \le k = [N(1/p-1)]$.

La descomposición atómica para funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap H^p(\mathbb{R}^N)$ queda recogida en el siguiente teorema.

Teorema 5.22 ([Cf], [L], [MS], [W]) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap H^p(\mathbb{R}^N)$ con $0 < p \le 1$. Entonces existe:

(a) una sucesión $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ de p-átomos y

(b) una sucesión $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ de números reales satisfaciendo

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)},$$

de manera que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_i(x),$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^N$, y con convergencia de la serie hacia f en el espacio $H^p(\mathbb{R}^N)$.

Observación. Al igual que hicimos notar en el caso de una variable, de la construcción de la descomposición atómica para funciones f de $H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos restringirnos a considerar átomos soportados en cubos que corten al soporte de f (ver [L]).

Teorema 5.23 *Sean $0 < p \leq 1$ y $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$. Existe una sucesión $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$ y una colección de H^p átomos en $\mathbb{Z}^N$, $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, de forma que*

$$a(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ a_i(n),\ \forall n \in \mathbb{Z}^N.$$

Además, existe una constante $C > 0$, independiente de la sucesión a, de manera que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \leq C \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Demostración. Supongamos $k = [N(1/p - 1)]$ par. Si $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$, consideramos

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n) \chi_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4})^N}(x - n).$$

Como consecuencia del Teorema 5.16, $f \in H^p(\mathbb{R}^N)$ y además

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|a\|_{H^p(\mathbb{Z}^N)}. \tag{5.15}$$

Puesto que $f \in H^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, podemos utilizar la descomposición atómica de estos espacios y escribir

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(x),\ \text{para casi todo punto } x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p < C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)}$, y cada b_i es un H^p-átomo en $\mathbb{R}^N$. Además, como hemos observado en el Teorema 5.22, la serie converge hacia f en $H^p(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, también en el sentido de las distribuciones temperadas.

Consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$, Q_i, el mínimo cubo que contiene el soporte de un átomo b_i y denotamos por

$$J_1 = \{i \in \mathbb{N};\ |Q_i| > 1/8^N\} \quad \text{y} \quad J_2 = \{i \in \mathbb{N};\ |Q_i| \leq 1/8^N\}.$$

En el caso $i \in J_1$, tenemos que

$$\|b_i\|_\infty \leq \frac{1}{|Q_i|^{1/p}} \leq 8^{N/p},$$

y $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty} \in l^p(\mathbb{Z}) \subset l^1(\mathbb{Z})$, por tanto, la serie $\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(y)$ converge a.e. $x \in \mathbb{R}^N$ y en el sentido de las distribuciones hacia una función $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Por esta razón, la serie $\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y)$, es convergente en casi todo punto y en $\mathcal{S}'$ hacia la función $f - g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

En consecuencia tenemos que, si C_k es la función del Lema 5.21, para cada $m \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned}
(f * C_k)(m) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(\cdot)\right) * C_k\right](m) \\
&= \int_{[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ C_k(y)\ dy \\
&= \int_{[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ C_k(y)\ dy \qquad (5.16)\\
&+ \int_{[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ C_k(y)\ dy \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

En el sumando (5.16), podemos aplicar el teorema de convergencia dominada y obtener

$$\int_{[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i\in J_1} \lambda_i\ b_i(m-y)\right)\ C_k(y)\ dy = \sum_{i\in J_1} \lambda_i\ (b_i * C_k)(m).$$

Veamos que el sumando de (5.17) es igual a 0. Como hemos hecho notar en la observación del Teorema 5.22, podemos reducirnos en la descomposición atómica de funciones de $H^p(\mathbb{R}^N)$ al caso de átomos b_i tales que sop $b_i \cap$ sop $f \neq \emptyset$. Por tanto, si $i \in J_2$ y $l \in \mathbb{Z}^N$, o bien sop $b_i \subset l+[-3/8,3/8]^N$, o bien sop $b_i \cap \big(l+[-1/2,1/2]^N\big) = \emptyset$. Por ello, para todo $l \in \mathbb{Z}^N$,

$$\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y) = 0, \quad \text{a.e. } y \in (l+[-1/2,1/2]^N) \cap (l+[-3/8,3/8]^N)^{\mathrm{c}}. \tag{5.18}$$

Si, como en el lema anterior, notamos por $J = \{j = (j_1, \cdots, j_N) \in \mathbb{Z}^N$ tales que $|j_i| \leq k/2,\ 1 \leq i \leq N\}$, de la ecuación (5.18) se deduce que

$$\begin{aligned}
&\int_{m+[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i\ b_i(y)\right)\ C_k(m-y)\ dy \\
&= \sum_{j\in J} \int_{m+j+[-1/2,1/2]^N} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)\right)\ C_k(m-y)\ dy \\
&= \sum_{j\in J} \int_{m+j+[-3/8,3/8]^N} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)\right)\ C_k(m-y)\ dy.
\end{aligned}$$

Para cada $j \in J$, consideramos $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ con sop $\varphi_j \subseteq m+j+[-1/2,1/2]^N$ y $\varphi_j \equiv 1$ en $m+j+[-3/8,3/8]^N$. De esta manera, como consecuencia de (5.18), escribimos la última ecuación como

$$\sum_{j\in J} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)\right)\ \varphi_j(y)\ C_k(m-y)\ dy \right).$$

Puesto que, según el Lema 5.21, C_k es igual a un polinomio de grado k sobre el soporte de φ_j, la función $\varphi_j(\cdot)C_k(m-\cdot)$ es de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De aquí que podamos usar la convergencia de la serie $\sum_{i\in J_2} \lambda_i b_i(y)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ y escribir la ecuación anterior como

$$\sum_{j\in J} \sum_{i\in J_2} \lambda_i\ < b_i(\cdot),\ C_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) > .$$

Como ya hemos hecho notar, para cada $i \in J_2$, o bien el soporte de b_i es disjunto con el de la función $C_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot)$, con lo cual tenemos que

$$< b_i(\cdot),\ C_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) >= 0,$$

o bien sop $b_i \subset m+j+[-3/8,3/8]^N$, en cuyo caso

$$< b_i(\cdot),\ C_k(m-\cdot)\varphi_j(\cdot) >=< b_i(\cdot),\ C_k(m-\cdot) >= 0,$$

debido a que C_k es un polinomio de grado k sobre sop b_i, y a que b_i tiene momentos nulos hasta orden k. Por tanto, se verifica que

$$\int_{[-(k+1)/2,(k+1)/2]^N} \left(\sum_{i \in J_2} \lambda_i \ b_i(m-y) \right) \ C_k(y) \ dy = 0.$$

Como consecuencia de lo anterior y de (5.14), tenemos que, para cada $m \in \mathbb{Z}^N$,

$$\begin{aligned} a(m) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(m-n) \int_{n+[-1/4,1/4]^N} C_k(x) \ dx = (f * C_k)(m) \\ &= \sum_{i \in J_1} \lambda_i (b_i * C_k)(m) = \sum_{i \in J_1} \lambda_i \ a_{i,k}(m). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Veamos, por último, que las sucesiones $a_{i,k} = \{(b_i * C_k)(m)\}_m$ son H^p-átomos en $\mathbb{Z}^N$. Por el razonamiento anterior, en (5.19) intervienen exclusivamente átomos b_i soportados en cubos Q_i tales que $|Q_i| > 1/8^N$ y de forma que $a_{i,k} \not\equiv 0$, por lo cual:

- sop $a_{i,k} \subseteq$ sop $(b_i * C_k) \cap \mathbb{Z}^N \subseteq (Q_i + [-(k+1)/2, (k+1)/2]^N) \cap \mathbb{Z}^N \subseteq B_{i,k}$ con $B_{i,k}$ bola de $\mathbb{Z}^N$. Puesto que $|Q_i| > 1/8^N$, el cardinal de $B_{i,k}$ puede estimarse como $\# B_{i,k} \leq (k+2+|Q_i|^{1/N})^N \leq C(k,N)|Q_i|$.
- $\|a_{i,k}\|_\infty \leq \|b_i\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |C_k(x)| \ dx \leq \dfrac{C(k)}{|Q_i|^{1/p}} \leq \dfrac{C(k,p,N)}{(\# B_{i,k})^{1/p}}.$
- Si $0 \leq |j| \leq k$, usamos la propiedad 3 de las funciones C_k y la propiedad de cancelación de los átomos b_i para polinomios de grado menor o igual que $k = [N(1/p-1)]$ y obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} m^j \ a_{i,k}(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} m^j (b_i * C_k)(m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} m^j \int_{\mathbb{R}^N} b_i(y) \ C_k(m-y) \ dy = (-1)^{|j|} \int_{\mathbb{R}^N} b_i(y) \ P_j(-y) \ dy = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que la sucesión $\{a_{i,k}\}_{i \geq 0}$ está formada por H^p-átomos en $\mathbb{Z}^N$, además por el Teorema 5.22 y (5.15)

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq C \|f\|^p_{H^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|a\|^p_{H^p(\mathbb{Z}^N)}.$$

Observación. Como ya hemos hecho notar, todo lo demostrado anteriormente hace referencia al caso k par.

Si k es impar, la demostración es análoga reemplazando la función f anterior por

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a(n)\ \chi_{[1/4,\ 3/4]^N}(x-n),$$

con $a \in H^p(\mathbb{Z}^N)$.

En este caso la funciones C_k construídas han de cumplir las condiciones:

1') sop $C_k \subset [-(k+1)/2, (k+1)/2]^N = Q_k$.

2') C_k es un polinomio de grado menor o igual que k sobre cada cubo de la forma $m + [0,1]^N$, $m \in \mathbb{Z}^N$.

3') Para todo multiíndice $j \in \mathbb{N}^N$ tal que $0 \leq |j| \leq k$,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} m^j\ C_k(x-m) = P_j(x),\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

donde P_j es un polinomio de grado $|j|$ determinado por la condición

$$\int_{n+[1/4,3/4]^N} P_j(x)\ dx = n^j, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^N,$$

(si $n = j = 0$, entenderemos que $n^j = 1$). $\Box$

Apéndice A

Dualidad $H^1(\mathbb{Z})$–$BMO(\mathbb{Z})$

Una función f localmente integrable pertenece al espacio $BMO(\mathbb{R})$ si la desigualdad

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\ dx \le A, \tag{A.1}$$

se verifica para todo intervalo I; donde $f_I = |I|^{-1}\int_I f\ dx$ representa el valor medio de f sobre el intervalo I. La desigualdad (A.1) afirma que sobre todo intervalo I, la oscilación de medias de f está acotada.

La cota más pequeña A para la cual (A.1) se satisface representará la norma de f en este espacio y se denota por $\|f\|_{BMO}$. Notamos que los elementos nulos para la norma BMO son las constantes, por tanto una función de BMO está definida salvo constantes aditivas.

C. Fefferman probó en [Fe] que BMO es el espacio dual de H^1. Es decir, todo funcional lineal continuo en H^1, puede describirse como una aplicación λ_f

$$\lambda_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ g(x)\ dx, \quad g \in H^1, \tag{A.2}$$

cuando dicha integral tenga sentido y donde f es una función de BMO. Observamos que para $f \in BMO$ general y $g \in H^1$, la integral anterior no tiene porque converger absolutamente (ver [St3] pág. 178) y, por tanto, $\lambda_f(g)$ se define inicialmente para el espacio H^1_a de todas las funciones g formado por combinaciones lineales finitas de H^1 átomos; dicho espacio es denso, en virtud de la descomposición atómica de H^1. Para g en este subespacio denso, la integral (A.2) converge, y la ambigüedad de f como elemento de BMO desaparece puesto que $\int g\ dx = 0$.

Ya en la teoría clásica de operadores integrales singulares ([GR],[St3]), el espacio BMO aparece como el espacio imagen de funciones de L^∞ a través de estos operadores. El siguiente resultado probado por Fefferman y Stein en [FS] afirma que las funciones de BMO pueden describirse en términos de transformadas de Hilbert de funciones de L^∞: para $f \in BMO(\mathbb{R})$, existen f_0 y $f_1 \in L^\infty$ tales que

$$f = f_0 + Hf_1.$$

En el presente apéndice, abordamos estas cuestiones para el espacio $BMO(\mathbb{Z})$. En primer lugar, el Teorema A.4 demuestra la dualidad $H^1(\mathbb{Z})$-$BMO(\mathbb{Z})$ a partir del correspondiente resultado en $\mathbb{R}$, de algunas relaciones entre los espacios $H^1(\mathbb{R})$ y $H^1(\mathbb{Z})$, ya probadas en el Capítulo 2, y de otras propiedades que relacionan $BMO(\mathbb{R})$ y $BMO(\mathbb{Z})$ que se demostrarán a continuación. Por último, el Teorema A.8 caracteriza el espacio $BMO(\mathbb{Z})$ en términos del operador $\tilde{H}^d$, adjunto del operador transformada discreta de Hilbert.

Definición A.1 *Diremos que $b \in BMO(\mathbb{Z})$ si*

$$\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})} = \sup_{a,b\in\mathbb{Z}} \frac{1}{b-a} \sum_{a\le n<b} \left| b(n) - \frac{1}{b-a} \sum_{a\le k<b} b(k) \right| < \infty\cdot$$

Observación. Si representamos por $I = \{k \in \mathbb{Z};\ a \le k < b \text{ con } a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ y escribimos

$$b_I = \frac{1}{b-a} \sum_{a\le k<b} b(k),$$

tenemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $a \le k < b$, y toda constante c

$$\begin{aligned} |b(k) - b_I| &\le |b(k) - c| + |c - b_I| \\ &\le |b(k) - c| + \frac{1}{b-a} \sum_{a\le k<b} |b(k) - c|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{a\le k<b} |b(k) - b_I| \le 2 \sum_{a\le k<b} |b(k) - c|.$$

Como consecuencia de esta observación, tenemos

$$\frac{1}{2}\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})} \le \sup_{a,b\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{b-a} \inf_c \sum_{a\le k<b} |b(k) - c| \right\} \le \|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}\cdot$$

Proposición A.2 *Sea b una sucesión de $BMO(\mathbb{Z})$, entonces*

$$\tilde{b}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\chi_{[n,n+1)}(x) \in \ BMO(\mathbb{R}).$$

Además, existe una constante $C > 0$, de manera que

$$\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{R})} \leq C\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.$$

Demostración. Sea $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$. Distinguiremos tres casos:

1. Si $|I| = |\beta - \alpha| \geq 1$, puesto que $[\beta] - [\alpha] + 1 \leq 3|\beta - \alpha|$, tenemos que, para toda constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_I |\tilde{b}(x) - c|\ dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^{[\alpha]+1} |b([\alpha]) - c|\ dx$$
$$+\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k=[\alpha]+1}^{[\beta]-1}\int_k^{k+1} |b(k) - c|\ dx + \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{[\beta]}^{\beta} |b([\beta]) - c|\ dx$$
$$\leq \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k=[\alpha]}^{[\beta]} |b(k) - c| \leq \frac{3}{[\beta]+1-[\alpha]}\sum_{k=[\alpha]}^{[\beta]} |b(k) - c|.$$

Tomando ínfimos respecto a las constantes $c \in \mathbb{R}$, obtenemos que

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_I |\tilde{b}(x) - c|\ dx \leq 3\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.$$

2. Si $|I| \leq 1$ y $[\beta] = [\alpha] + 1$, tenemos que

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_I |\tilde{b}(x) - c|\ dx$$
$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left(\int_\alpha^{[\alpha]+1} |b([\alpha]) - c|\ dx + \int_{[\alpha]+1}^{\beta} |b([\beta]) - c|\ dx\right)$$
$$\leq 2\frac{1}{[\beta]-[\alpha]+1}\inf_{c\in\mathbb{R}}\sum_{[\alpha]\leq k\leq[\beta]} |b(k) - c| \leq 2\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.$$

3. Por último, si $|I| \leq 1$ y $[\beta] = [\alpha]$, tenemos que

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_I |\tilde{b}(x) - c|\ dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\inf_{c\in\mathbb{R}}\int_\alpha^{\beta} |b([\alpha]) - c|\ dx$$
$$= \inf_{c\in\mathbb{R}} |b([\alpha]) - c| \leq \|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.$$

Tomando el supremo en los intervalos $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, obtenemos que

$$\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{R})} \leq 3\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.\square$$

Proposición A.3 *Si g es una función de $BMO(\mathbb{R})$, la sucesión $\{\int_n^{n+1} g(x)\ dx\}_{n\in\mathbb{Z}} \in BMO(\mathbb{Z})$. Además, se verifica que*

$$\left\| \left\{ \int_n^{n+1} g(x)\ dx \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R})}.$$

Demostración. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, si g_I denota a la media de g sobre el intervalo $I = (a, b)$ se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \inf_{c\in\mathbb{R}} \sum_{a\leq n<b} \left| \int_n^{n+1} g(x)\ dx - c \right| &\leq \frac{1}{b-a} \sum_{a\leq n<b} \left| \int_n^{n+1} (g(x) - g_I)\ dx \right| \\ \leq \frac{1}{b-a} \sum_{a\leq n<b} \int_n^{n+1} |g(x) - g_I|\ dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b |g(x) - g_I|\ dx \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Tomando supremos en $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a < b$, obtenemos que

$$\left\| \left\{ \int_n^{n+1} g(x)\ dx \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq \|g\|_{BMO(\mathbb{R})}.\square$$

Teorema A.4 *El espacio dual de $H^1(\mathbb{Z})$ es isomorfo a $BMO(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Sea $b \in BMO(\mathbb{Z})$. Demostraremos que el funcional lineal

$$\lambda_b(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\ b(n),\ \ a \in H^1(\mathbb{Z})$$

es acotado sobre $H^1(\mathbb{Z})$, es decir, existe una constante $C > 0$ independiente de la sucesión b tal que

$$\|\lambda_b\| = \sup_{\|a\|_{H^1(Z)}} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\ b(n) \right| \leq C\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}. \tag{A.3}$$

Si construimos la función

$$\tilde{b}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b(n)\chi_{[n,n+1)}(x),$$

$\tilde{b} \in BMO(\mathbb{R})$ como consecuencia de la Proposición A.2. Por otro lado, el funcional definido sobre toda $f \in H^1(\mathbb{R})$ como

$$\lambda_{\tilde{b}}(f) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{b}(x) f(x)\, dx,$$

verifica que

$$\|\lambda_{\tilde{b}}\| \leq C\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{R})}.$$

Si $a \in H^1(\mathbb{Z})$ es una sucesión finita, consideramos la función

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\chi_{[n,n+1)}(x).$$

Tenemos, debido al Teorema 2.17, que $f \in H^1(\mathbb{R})$ de soporte compacto, y además

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|a\|_{H^1(\mathbb{Z})}.$$

La acción del funcional $\lambda_{\tilde{b}}$ sobre esta f viene dada por

$$\lambda_{\tilde{b}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\ b(n) = \lambda_b(a).$$

Por ello,

$$|\lambda_b(a)| = |\lambda_{\tilde{b}}(f)| \leq C\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{R})} \leq C\|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}.$$

Esto prueba (A.3) a partir de la acotación sobre toda sucesión finita de $H^1(\mathbb{Z})$. Puesto que debido a la descomposición atómica de $H^1(\mathbb{Z})$ (Teorema 2.26), éstas son densas, se deduce (A.3) para toda $a \in H^1(\mathbb{Z})$.

Recíprocamente, veamos que todo funcional λ sobre $H^1(\mathbb{Z})$ es de la forma $\lambda = \lambda_{\tilde{b}}$ para cierta $\tilde{b} \in BMO(\mathbb{Z})$ y que

$$\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq C\|\lambda\|.$$

En efecto, dado un funcional $\lambda \in (H^1(\mathbb{Z}))^*$, definimos $\tilde{\lambda}$ de forma que,

$$\tilde{\lambda}(f) = \lambda\left(\left\{\int_n^{n+1} f(x)\, dx\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\right), \quad f \in H^1(\mathbb{R})$$

Si notamos por $\tilde{f} = \left\{\int_n^{n+1} f(x)\, dx\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$, se verifica que, como consecuencia del Teorema 2.27,

$$|\tilde{\lambda}(f)| = |\lambda(\tilde{f})| \leq \|\lambda\|\|\tilde{f}\|_{H^1(\mathbb{Z})} \leq \|\lambda\|\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

De lo cual deducimos que $\tilde{\lambda} \in (H^1(\mathbb{R}))^*$ y que

$$\|\tilde{\lambda}\| \leq \|\lambda\|. \tag{A.4}$$

Este hecho implica que existe $b \in BMO(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_b$, es decir, para toda $f \in H^1(\mathbb{R})$ acotada y de soporte compacto,

$$(\tilde{\lambda})(f) = (\tilde{\lambda}_b)(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\; b(x)\; dx,$$

además $\|\tilde{\lambda}\| = \|b\|_{BMO(\mathbb{R})}$.

Sea $a \in H^1(\mathbb{Z})$ finita y definimos, como antes,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\chi_{[n,n+1)}(x),$$

tenemos que $f \in H^1(\mathbb{R})$ y verifica que $\|f\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C\|a\|_{H^1(\mathbb{Z})}$.

De la definición de $\tilde{\lambda}$, tenemos que para esta f,

$$\lambda(a) = \tilde{\lambda}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) \int_n^{n+1} b(x)\; dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\tilde{b}(n).$$

Donde la sucesión $\{\tilde{b}(n)\}_n = \{\int_n^{n+1} b(x)\; dx\}_n \in BMO(\mathbb{Z})$, debido a la Proposición A.3 y además,

$$\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq C\|b\|_{BMO(\mathbb{R})}.$$

Hemos probado que $\lambda \in (H^1(\mathbb{Z}))^*$ es de la forma $\lambda_{\tilde{b}}$ donde $\tilde{b} \in BMO(\mathbb{Z})$, además de la desigualdad anterior y (A.4) tenemos que

$$\|\tilde{b}\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq C\|b\|_{BMO(\mathbb{R})} = C\|\tilde{\lambda}\| \leq C\|\lambda\|.\square$$

Definición A.5 *Si $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, definimos el operador*

$$\begin{aligned}(\tilde{H}^d g)(k) &= H^d(g\chi_{[-2|k|,2|k|]})(k) - H^d(g\chi_{[-2|k|,2|k|]})(0)\\ &+ \sum_{|n|>2|k|}\left(\frac{g(n)}{k-n} + \frac{g(n)}{n}\right), \quad \textit{si } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

$(\tilde{H}^d g)(0) = 0$, *si* $k = 0$.

Notamos que si $g \in l^2(\mathbb{Z})$, $(\tilde{H}^d g)(k) = (H^d g)(k) - (H^d g)(0)$.

Lema A.6 *Si $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, $\tilde{H}^d g \in BMO(\mathbb{Z})$. Es más, para cierta constante $C > 0$,*

$$\|\tilde{H}^d g\|_{BMO(\mathbb{Z})} \leq C\|g\|_\infty.$$

Demostración. Sea $I = \{k \in \mathbb{Z};\ a \leq k < b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ y sea $J = 2I$, el conjunto de enteros centrados en $[(a+b)/2]$ tal que su cardinal es $\#J = 2\#I - 1$. Si $g \in l^\infty(\mathbb{Z})$, escribimos $g = g_1 + g_2$ con $g_1 = g\chi_J$, $g_2 = g\chi_{J^c}$. Se verifica que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in I} |\tilde{H}^d g_1(n) + (H^d g_1)(0)| &= \sum_{n\in I} |(H^d g_1)(n)| \leq (\#I)^{1/2}\|H^d g_1\|_2 \\
&\leq (\#I)^{1/2}\left(\sum_{n\in J}|g(n)|^2\right)^{1/2} \leq (\#I)^{1/2}(2\#I)^{1/2}\|g\|_\infty \\
&= C\#I\|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Escribimos $n_0 = [(a+b)/2]$, y suponemos que $n \in I$ es tal que $|n| \leq |n_0|$ (procederíamos análogamente si $|n| > |n_0|$). Se verifica que

$$\begin{aligned}
&|\tilde{H}^d g_2(n) - \tilde{H}^d g_2(n_0)| \\
&= \Bigg| H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(n) - H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(0) + \sum_{|k|>2|n|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right) \\
&-H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(n_0) + H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(0) - \sum_{|k|>2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n_0-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right)\Bigg| \\
&= \Bigg| H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(n) - H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(0) + \sum_{|k|>2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right) \\
&+ \sum_{2|n|<|k|\leq 2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right) - H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(n_0) + H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(0) \\
&- \sum_{|k|>2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n_0-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right)\Bigg| = \Bigg| \sum_{|k|>2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} - \frac{g_2(k)}{n_0-k}\right) \\
&+ \sum_{|k|\leq 2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} - \frac{g_2(k)}{n_0-k}\right) + H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(0) - H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(0) \\
&- \sum_{2|n|<|k|\leq 2|n_0|}\frac{g_2(k)}{n-k} + \sum_{2|n|<|k|\leq 2|n_0|}\left(\frac{g_2(k)}{n-k} + \frac{g_2(k)}{k}\right)\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\leq \left|\sum_{m\notin J}\frac{g(m)}{n-m}-\frac{g(m)}{n_0-m}\right| + \left|H^d(g_2\chi_{[-2|n_0|,2|n_0|]})(0)-H^d(g_2\chi_{[-2|n|,2|n|]})(0)\right.$$

$$\left. + \sum_{2|n|<|k|\leq 2|n_0|}\frac{g_2(k)}{k}\right| = \left|\sum_{m\notin J}\frac{g(m)}{n-m}-\frac{g(m)}{n_0-m}\right| \leq \|g\|_\infty \sum_{m\notin J}\left|\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n_0-m}\right|.$$

Si $m\notin J$, tenemos que $|m-n_0|\geq \#I$, con lo cual notando por $k=m-n_0$, podemos estimar que

$$\sum_{m\notin J}\left|\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n_0-m}\right| \leq \#I\sum_{|k|\geq \#I}\frac{1}{|k||k-(n-n_0)|}\leq C\#I\sum_{|k|\geq \#I}\frac{1}{|k|^2}\leq C.$$

Por tanto, de lo anterior, deducimos que, para todo $n\in I$,

$$|\tilde{H}^d g_2(n)-\tilde{H}^d g_2(n_0)|\leq C\|g\|_\infty.$$

Y, en consecuencia, de esta desigualdad y de la probada anteriormente para g_1, se tiene que

$$\sum_{n\in I}|\tilde{H}^d g(n)-(\tilde{H}^d g_2(n_0)-H^d g_1(0))|\leq C\#I\|g\|_\infty.\Box$$

Proposición A.7 *Si $a\in H^1(\mathbb{Z})$ y $b\in l^\infty(\mathbb{Z})$, se verifica que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(H^d a)(n)b(n) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}a(n)(\tilde{H}^d b)(n).$$

Demostración. Para toda sucesión finita $a\in H^1(\mathbb{Z})$, debido a la propiedad de cancelación $\sum_m a(m)=0$, tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(H^d)a(n)b(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\neq n}\frac{a(m)}{n-m}\right)b(n)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}b(n)\left(\sum_{|m|\geq|n|/2,n\neq m}\frac{a(m)}{n-m}+\sum_{|m|<|n|/2}\frac{a(m)}{n-m}\right)$$

$$- \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}b(n)\left(\sum_{|m|\geq|n|/2}\frac{a(m)}{n}+\sum_{|m|<|n|/2}\frac{a(m)}{n}\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}b(n)\left(\sum_{|m|\geq|n|/2,n\neq m}\frac{a(m)}{n-m}-\frac{a(m)}{n}\right)+\sum_{n\in\mathbb{Z}}b(n)\left(\sum_{|m|<|n|/2}\frac{a(m)}{n-m}-\frac{a(m)}{n}\right)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m) \left(\sum_{|n|\le 2|m|, n\ne m} \frac{b(n)}{n-m} - \sum_{|n|\le 2|m|, n\ne 0} \frac{b(n)}{n} \right)$$
$$+ \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m) \left(\sum_{|n|>2|m|} \frac{b(n)}{n-m} - \frac{b(n)}{n} \right) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)(\tilde{H}^d b)(m).$$

Si $a \in H^1(\mathbb{Z})$, consideramos una sucesión de sucesiones finitas $\{a_k\}_{k\ge 0} \in H^1(\mathbb{Z})$ tales que

$$\|a_k - a\|_{H^1(\mathbb{Z})} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces, como consecuencia del Teorema A.4 y el Lema A.6, se verifica que para $b \in l^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} (a_k - a)(m)(\tilde{H}^d b)(m) \right| \le \|a_k - a\|_{H^1(\mathbb{Z})} \|\tilde{H}^d b\|_{BMO(\mathbb{Z})} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_k(m)(\tilde{H}^d b)(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m)(\tilde{H}^d b)(m).$$

Un argumento similar, prueba que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^d a_k(n) b(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^d a(n) b(n).$$

De aquí que para toda $a \in H^1(\mathbb{Z})$,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} H^d a(n) b(n) = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m) \tilde{H}^d b(m). \square$$

Teorema A.8 *Si $b \in BMO(\mathbb{Z})$, existen b_1, $b_2 \in l^\infty(\mathbb{Z})$ tales que, salvo constantes aditivas,*

$$b = b_1 - \tilde{H}^d(b_2).$$

Demostración. Por el Teorema A.4, sabemos que todo funcional lineal λ_b define una forma sobre $H^1(\mathbb{Z})$ de manera que para toda $a \in H^1(\mathbb{Z})$,

$$\lambda_b(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) b(n),$$

con $\|\lambda_b\| = \|b\|_{BMO(\mathbb{Z})}$. Por otro lado, $H^1(\mathbb{Z})$ es isomorfo al subespacio cerrado de elementos $(a, H^d a)$ del espacio producto $l^1(\mathbb{Z}) \times l^1(\mathbb{Z})$. Como consecuencia del teorema de Hann-Banach, el funcional λ_b tiene una extensión a un funcional Λ acotado sobre $l^1(\mathbb{Z}) \times l^1(\mathbb{Z})$. Puesto que el dual de $l^1(\mathbb{Z}) \times l^1(\mathbb{Z})$ es el espacio $l^\infty(\mathbb{Z}) \times l^\infty(\mathbb{Z})$, existen sucesiones $b_1, b_2 \in l^\infty$ de forma que para $a_1, a_2 \in l^1(\mathbb{Z})$,

$$\Lambda(a_1, a_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_1(n)b_1(n) + a_2(n)b_2(n),$$

además $\|\Lambda\| = \|b_1\|_\infty + \|b_2\|_\infty$.

Por tanto, como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que para toda $a \in H^1(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \lambda_b(a) &= \Lambda(a, H^d a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)b_1(n) + H^d a(n)b_2(n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)(b_1(n) - \tilde{H}^d(b_2)(n)). \end{aligned}$$

Es decir, para toda $a \in H^1(\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)[b(n) - (b_1(n) - \tilde{H}^d(b_2)(n))] = 0,$$

de lo cual deducimos que módulo constantes aditivas,

$$b = b_1 - \tilde{H}^d b_2. \Box$$

Bibliografía

[AC] P. Auscher y M.J. Carro, *On relations between operators on $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ and $\mathbb{Z}^n$*, Studia Math. 101 (1992), 165–182.

[B] R.P. Boas, *Entire functions*, Academic Press (1954).

[BC] S. Boza y M.J. Carro, *Discrete Hardy spaces*, Studia Math. 129 (1998), 31–50.

[C] M.J. Carro, *Discretization of linear operators on $L^p(\mathbb{R}^N)$*, Illinois J. Math. 42 (1998), 1–18.

[CS] M.J. Carro y J. Soria, *Transference theory on Hardy and Sobolev spaces*, Colloq. Math. 74 (1997), 47–69.

[Cf] R. Coifman, *A real-variable characterization of H^p*, Studia Math. 51 (1974), 269–274.

[CW1] R. Coifman y G. Weiss, *Transference methods in analysis*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 31 (1976), 1–59.

[CW2] R. Coifman y G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–645.

[Co] L. Colzani, *Restriction and extension of Fourier multipliers*, Boll. Un. Mat. Ital.(6) 1-A (1982), 403–410.

[E] C. Eoff, *The discrete nature of the Paley-Wiener spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 505–512.

[F1] D. Fan, *De Leeuw's theorem on Triebel-Lizorkin spaces*, J. Math. Anal. Appl. 182 (1994), 540–554.

[F2] D. Fan, *Multipliers on certain function spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo 63 (1994), 449–463.

[Fe] C. Fefferman, *Characterizations of bounded mean oscillation*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 587–588.

[FS] C. Fefferman y E. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137–193.

[FJW] M. Frazier, B. Jawerth y G. Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 79, Amer. Math. Soc. (1991).

[GR] J. García-Cuerva y J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland (1985).

[H] Y.-S. Han, *Triebel-Lizorkin spaces on spaces of homogeneous type*, Studia Math. 108 (1994), 247–273.

[J] M. Jodeit, *Restrictions and extensions of Fourier multipliers*, Studia Math. 34 (1970), 215–226.

[KT] C. Kenig y P. Tomas, *Maximal operators defined by Fourier multipliers*, Studia Math. 68 (1980), 79–83.

[L] R.H. Latter, *A decomposition of $H^p(\mathbb{R}^N)$ in terms of atoms*, Studia Math. 62 (1978), 92–101.

[Le] K. de Leeuw, *On L^p multipliers,* , Ann. of Math. 81 (1965), 364–379.

[LL] Z. Liu y S. Lu, *Transference and restriction of maximal multipliers operators on Hardy spaces*, Studia Math. 105 (2) (1993), 137–193.

[MS] R. Macías y C. Segovia, *A descomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. Math. 33 (1979), 271–309.

[Mi] A. Miyachi, *On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^N)$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA Math. 27 (1980), 157–179.

[R] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Ed. Reverté (1979).

[S] C.E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proceeding of the IRE 37 (1949), 10–21.

[Sj] P. Sjölin, *Convolution with oscillating kernels*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 47–56.

[St1] E.M. Stein, *Singular integrals and differenciability properties of functions*, Princeton University Press (1970).

[St2] E.M. Stein, *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Princeton University Press (1970).

[St3] E.M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press (1993).

[STW] E. Stein, M.H. Taibleson y G. Weiss, *Weak-type estimates for maximal operators on certain H^p spaces*, Rend. Circ. Mat. Palermo 1 (1981), 81–97.

[SW] E. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press (1971).

[Su1] Q. Sun, *Spaces of sequences and stability of integer translates*, Z. Anal. Anwendungen 12 (1993), 567–584.

[Su2] Q. Sun, *Multiplier extension and sampling theorem on Hardy spaces*, Publ. Mat. 38 (1994), 441–454.

[TW] M.H. Taibleson y G. Weiss, *The molecular characterization of certain Hardy Spaces*, Asterisque 77 (1980), 68–149.

[To] R. Torres, *Space of sequences, sampling theorem and functions of exponential type*, Studia Math. 100 (1991), 51–74.

[U] A. Uchiyama, *A maximal function characterization of H^p on the space of homogeneous type*, Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980), 579–582.

[W] J.M. Wilson, *On the atomic decomposition for Hardy spaces*, Pacific J. Math. 116 (1985), 201–207.