JORNADAS SOBRE LOS
PROBLEMAS DEL MILENIO
Barcelona, del 1 al 3 de junio de 2011

# LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

DIEGO CÓRDOBA GAZOLAZ

## 1. Introducción

El objetivo de estas notas es enunciar y describir el problema Clay sobre las ecuaciones de Navier-Stokes [26]. La cuestión a determinar es si un fluido incompresible con energía finita puede desarrollar singularidades en tiempo finito. Ocurre que las ecuaciones que rigen la dinámica de un fluido son no-lineales y no-locales pero, a su vez, tienen una rica estructura que conserva cantidades globales y, en el caso de ausencia de viscosidad (las ecuaciones de Euler) conservan también diversas estructuras locales. Primero presentaremos una somera deducción de las ecuaciones, que nos permitirá, a continuación, enunciar el problema Clay. La finalidad del resto de las notas es hacer una breve y esquemática introducción a la teoría clásica de los fluidos y resaltar una lista de resultados destacados en esta línea de investigación. Por último mostraremos ejemplos de singularidades en varios problemas de frontera libre.

Las notas constan de las secciones siguientes:

- Ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.
- El problema del Instituto Clay de Matemáticas.
- Ejemplos, cantidades conservadas y estimaciones a priori.
- Resultados más destacados.
- La vorticidad y las ecuaciones de Euler.
- Fluidos con frontera libre.

Recomendamos las monografías [47], [48], [17], [13], [9] y [49], a quien desee obtener más detalles sobre cada una de las secciones.

## 2. Ecuaciones de Euler y Navier-Stokes

Podemos decir que la teoría matemática de la dinámica de los fluidos comienza en el siglo XVII con el trabajo de Isaac Newton, quien fue el primero en aplicar sus leyes de la mecánica a los movimientos de los flujos. Más tarde Leonhard Euler escribió por primera vez (1755) las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un fluido ideal, es decir, en ausencia de disipación debido a la interacción entre moléculas. Y finalmente C. Navier (1822) [52] e, independientemente, G. Stokes (1845) [61] introdujeron en el modelo el término de viscosidad y llegaron a las ecuaciones que hoy denominamos "Navier-Stokes".

Consideramos que el fluido ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y asumimos la hipótesis del continuo que dice que en cada punto de este dominio hay fluido. A cada tiempo $t$ las partículas del fluido tienen una correspondencia biyectiva con las coordenadas $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. Caracterizamos el fluido por las siguientes funciones:

- Campo de velocidades $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ que determina la velocidad que tiene una partícula en cada punto $x \in \Omega$ del dominio y en cada tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.
- Las presiones, $p = p(x,t)$, en el seno del fluido.
- La densidad, $\rho = \rho(x,t)$, del fluido.

Las ecuaciones de Navier-Stokes pretenden modelar la evolución de estas cantidades a partir de la segunda ley de Newton, que asocia la aceleración de las partículas con las fuerzas que actúan sobre ellas (las variaciones espaciales de la presión, las fuerzas de rozamiento entre las moléculas, viscosidad, y las posibles fuerzas externas como la gravitatoria), y con la ley de conservación de masa. Para llegar a ellas hay dos formas de interpretar el fluido; una es fijar un punto del dominio y medir sus características en ese punto (la versión Euleriana) o calcular la variación de sus características a lo largo de la trayectoria de la partícula (la versión Lagrangiana).

Aquí seguiremos la versión Lagrangiana y para ello definimos la trayectoria de una partícula $\alpha \in \Omega$ que está representada por $X(\alpha,t)$ y satisface el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dX(\alpha,t)}{dt} = u(X(\alpha,t),t), \\ X(\alpha,0) = \alpha. \end{cases}$$

Si analizamos cómo cambia una función $q$ según seguimos la trayectoria, tenemos la *derivada material*:

$$\frac{\partial q(X(\alpha,t),t)}{\partial t} = q_t + \frac{dX_1}{dt}\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{dX_2}{dt}\frac{\partial q}{\partial x_2} + \frac{dX_3}{dt}\frac{\partial q}{\partial x_3} = q_t + u\nabla q \equiv D_t q.$$

Otra propiedad que se pide al fluido, en el problema que nos ocupa en estas notas, es la incompresibilidad del mismo:

$$X(\alpha,t) \quad \text{es } \textit{incompresible} \text{ si} \quad \mathrm{vol}(\widetilde{\Omega}) = \mathrm{vol}(X(\widetilde{\Omega},t)) \quad \text{para todo} \quad \widetilde{\Omega} \subset \Omega,$$

que es equivalente a exigir al campo de velocidades que tenga divergencia nula:

$$X(\alpha,t) \quad \text{es incompresible} \Leftrightarrow \nabla \cdot u = 0.$$

Siendo esa equivalencia una consecuencia del cambio de variables

$$\mathrm{vol}(X(\Omega,t)) = \int_{X(\Omega,t)} dx = \int_\Omega J(\alpha,t)d\alpha,$$

donde $J$ es el jacobiano de la transformación:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{vol}(X(\Omega,t)) = \int_\Omega J_t d\alpha = \int_\Omega \nabla \cdot u|_{(X(\alpha,t),t)} J(\alpha,t)d\alpha = \int_{X(\Omega,t)} \nabla \cdot u dx.$$

Utilizando la segunda ley de Newton tenemos que

$$D_t(\rho u) = \text{Fuerza},$$

por otro lado la conservación de masa junto con la incompresibilidad implica:

$$D_t(\rho) = 0.$$

Las dos leyes dan lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u \cdot \nabla u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + f_\varepsilon^i, \\ \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \\ \rho_t + u \cdot \nabla \rho = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

donde

- $u = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ velocidad del fluido;
- $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ presión;
- $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$ densidad;
- $\nu = cte \geq 0$ viscosidad;
- $f_\varepsilon = (f_\varepsilon^1, f_\varepsilon^2, f_\varepsilon^3)$ fuerza externa.

En el caso particular $\nu = 0$ obtenemos las ecuaciones de Euler. En total, tenemos cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

**Notaciones 2.1.** Hacemos uso de las siguientes nomenclaturas:

- $g_t = \dfrac{\partial g}{\partial t}$;
- $\nabla g = \Big(\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_2}, \dfrac{\partial g}{\partial x_3}\Big)$;
- $\Delta g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_3^2}$;
- $\nabla \cdot \vec{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}$ siendo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.
- Fluido incompresible $\Leftrightarrow \nabla \cdot u = 0$;
- Fluido perfecto $\Leftrightarrow \nu = 0$;
- Fluido homogéneo $\Leftrightarrow \rho = 1$;
- Fluido ideal $\Leftrightarrow$ las tres condiciones anteriores.

Las condiciones de contorno varían dependiendo del contexto en el que estemos; un fluido en un vaso tiene la restricción de que la frontera del dominio es estática. En el caso por ejemplo, de considerar la evolución de dos fluidos inmiscibles uno dentro de otro (o un fluido en el vacío) entonces la frontera se mueve con el flujo. En el problema de la existencia de singularidades, en fluidos incompresibles, las condiciones de contorno desempeñan un papel crucial, por ejemplo en 2-dimensiones las respuesta a esta pregunta pueden ser opuestas dependiendo si la frontera es libre o rígida. Fluidos con una estructura regular dentro del dominio pueden generar singularidades en la interfase. Estas singularidades pueden ser consecuencia de que el escenario del que se parte es inestable. Por ejemplo, en el caso de fuerzas gravitatorias, cuando un fluido más denso está encima de otro menos denso. No obstante las más interesantes serán aquellas que se forman a partir de un escenario estable.

En el problema descrito en la siguiente sección se considera que el dominio es todo el espacio $\mathbb{R}^3$, o el toro $\mathbb{T}^3$, en el caso de soluciones periódicas. Cuando consideramos $\mathbb{R}^3$, exigimos que las soluciones tengan cierto decaimiento en el infinito para que la energía sea finita.

## 3. El problema del Instituto Clay de Matemáticas

Consideramos un fluido viscoso, homogéneo e incompresible:

$$
\begin{cases}
u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f, & (\nu > 0, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0) \\
\nabla \cdot u = 0, & \\
u(x,0) = u_0. &
\end{cases} \tag{2}
$$

- El dato inicial debe verificar las siguiente condiciones de regularidad:
$$|\partial_x^\alpha u_{0i}| \leq C_{\alpha,k}(1+|x|)^{-k}, \quad \text{para todo } \alpha, k > 0,$$
y la fuerza exterior
$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f| \leq C_{\alpha,k,m}(1+|x|+t)^{-k}, \quad \text{para todo } \alpha, m, k > 0.$$
- Las soluciones admisibles al problema son:
  - Para $x \in \mathbb{R}^3$, $(u,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ con decaimiento en el infinito de la presión y de energía finita, es decir, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx < \infty$ para todo $t$;
  - o bien soluciones $(u,p) \in C^\infty(\mathbb{T}^3 \times [0,\infty))$ periódicas y la presión de media cero.

**Problema Clay:** Demostrar una de las dos afirmaciones siguientes:

1. Sea $u_0$ satisfaciendo las condiciones de regularidad. Entonces siempre existen soluciones admisibles.
2. Encontrar $u_0$ satisfaciendo las condiciones de regularidad y tal que no existe solución admisible con dato inicial $u_0$.

Para más detalles véase [26].

## 4. Ejemplos, cantidades conservadas y estimaciones a priori

### 4.1. Ejemplos clásicos de soluciones a las ecuaciones:

i) Soluciones estacionarias:

$$u = (\gamma_1 x_1, \gamma_2 x_2, -[\gamma_1+\gamma_2]x_3) \qquad y \qquad p = -\frac{\gamma_1}{2}x_1^2 - \frac{\gamma_2}{2}x_2^2 - \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}x_3^2$$

donde la velocidad y la presión no dependen de la variable $t$. Sin embargo, las trayectorias satisfacen

$$X(\alpha,t) = (\alpha_1 e^{\gamma_1 t}, \alpha_2 e^{\gamma_2 t}, \alpha_3 e^{-[\gamma_1+\gamma_2]t}),$$

siendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

ii) Singularidades con energía infinita:

$$u = (-\frac{x_1}{T-t}, \frac{x_2}{T-t}, 0) \qquad y \qquad p = \frac{x_2^2}{(T-t)^2}$$

desarrollan una singularidad para $t \to T$.

iii) Crecimiento lineal ($\nabla u \sim t$) con energía finita:

$$u = (0, f(x_3 - tw(x)), w(x)),$$

Las funciones $w$ y $f$ se toman periódicas.

iv) Soluciones axisimétricas (variables cilíndricas):

$$u = u^r(r, x_3, t)e_r + u^\theta(r, x_3, t)e_\theta + u^3(r, x_3, t)e_3,$$

siendo $e_r = (\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0)$, $e_\theta = (-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

Si $u_0^\theta = 0$, entonces $u^\theta = 0$ se conserva para todo tiempo y como consecuencia hay existencia de solución global. Si $u_0^\theta \neq 0$, el problema a día de hoy está abierto. Para el caso viscoso, $\nu > 0$, sólo puede haber singularidades en el eje $z$. Para más detalles véase [48].

**4.2. Cantidades globales conservadas.** El dominio que consideramos es $\Omega_n = \mathbb{R}^n$ (soluciones que decaen suficientemente rápido en el infinito) o $\mathbb{T}^n$ (soluciones periódicas) con $n = 2, 3$. Desde las ecuaciones se deduce que se conservan las siguientes cantidades con fuerza $f = 0$:

1. $\int_{\Omega_n} u dx$;
2. $\int_{\Omega_n} \nabla \times u dx$;
3. $\int_{\Omega_n} u \cdot (\nabla \times u) dx$;
4. $\int_{\Omega_n} |u|^2 dx$ con viscosidad nula, si $\nu > 0$, la energía decae.

Para ver esta última afirmación, consideremos la ecuación

$$u_{it} + u \cdot \nabla u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \tag{3}$$

multipliquemos por $u_i$ e integremos en $\Omega_n$. Integrando por partes se obtiene

$$\int_{\Omega_n} u_i u_{it} + \int_{\Omega_n} u_i (u \cdot \nabla u_i) = \int_{\Omega_n} -\frac{\partial p}{\partial x_i} u_i + \int_{\Omega_n} (\nu \Delta u_i) u_i$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{2}\Big(\int_{\Omega_n} |u_i|^2\Big)_t = \int_{\Omega_n} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \nu \int_{\Omega_n} |\nabla u_i|^2$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Sumando en las tres componentes y utilizando la incompresibilidad tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_n} |u|^2 = -\nu \int_{\Omega_n} |\nabla u|^2,$$

que al integrar en tiempo

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_n} |u|^2 + \nu \int_0^T \int_{\Omega_n} |\nabla u|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_n} |u_0|^2.$$

Se puede concluir que la energía $\int_{\Omega_n} |u|^2$ se conserva en el caso $\nu = 0$. Además en el caso viscoso obtenemos una cota sobre las derivadas

$$\int_0^T \int_{\Omega_n} |\nabla u|^2 dt < C \tag{4}$$

donde C depende de la energía inicial.

**4.3. Estimaciones a priori ($\nu > 0$) para las primeras derivadas.** Multiplicamos la ecuación (3) por $-\Delta u_i$ e integramos

$$-\int_{\Omega_n} \Delta u_i u_{it} - \int_{\Omega_n} \Delta u_i (u \cdot \nabla u_i) = \int_{\Omega_n} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Delta u_i - \int_{\Omega_n} (\nu \Delta u_i) \Delta u_i$$

y se deduce

$$\Big( \int_{\Omega_n} |\nabla u_i|^2 \Big)_t - \int_{\Omega_n} \Delta u_i (u \cdot \nabla u_i) = -\int_{\Omega_n} p \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} - \nu \int_{\Omega_n} |\Delta u_i|^2$$

para cada $i = 1, 2, 3$. Sumando en las tres componentes tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_n} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega_n} \Delta u \cdot (u \cdot \nabla u) = -\nu \int_{\Omega_n} |\Delta u|^2,$$

aplicando la desigualdad de Hölder al segundo término obtenemos

$$\left| \int_{\Omega_n} \Delta u \cdot (u \cdot \nabla u) \right| \leq ||u||_{L^4} ||\nabla u||_{L^4} ||\Delta u||_{L^2}.$$

*4.3.1. En dimensión 2:* la norma $L^4$ puede ser acotada por

$$||f||_{L^4} \leq c ||f||_{L^2}^{\frac{1}{2}} ||\nabla f||_{L^2}^{\frac{1}{2}}$$

que implica la desigualdad

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \leq c \Big( \int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \Big)^2$$

de la que se deduce $\int_{\Omega_2} |\nabla u|^2 \leq C$ por la cota (4).

*4.3.2. En dimensión 3:* la norma $L^4$ está acotada por

$$||f||_{L^4} \leq c ||f||_{L^2}^{\frac{1}{4}} ||\nabla f||_{L^2}^{\frac{3}{4}}$$

que nos impide obtener una desigualdad similar a la de dimensión $n = 2$. Como consecuencia de las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} |\nabla u|^2 \leq c ||u||_{L^6}^4 \int_{\Omega_3} |\nabla u|^2.$$

Por otra parte

$$||u||_{L^6} \leq c ||\nabla u||_{L^2}$$

que implica

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_3} |\nabla u|^2 \leq c \Big( \int_{\Omega_3} |\nabla u|^2 \Big)^3.$$

## 5. Resultados más destacados

Algunos de los resultados parciales conocidos son los siguientes:

- Existencia local (Leray, 1933-34 [42], [43] y [44]). El problema está bien propuesto. Existe un tiempo $T$ que depende del dato inicial tal que hay soluciones regulares para todo $t$ en $[0,T]$ (en el caso de Euler véase [45]). En particular para $\nu > 0$
$$u \in C([0,T],H^1) \cap L^2([0,T],H^2).$$
- Existencia global para $n = 2$ (Leray [42], [43] y [44], Wolibner [63], Kato [33], Yudovich [66], Ladyzhenskaya [41]) con $\nu \geq 0$.
- Existencia de soluciones débiles. En 1934 Leray [42] introdujo la noción de solución débil y probó la existencia de soluciones débiles para las ecuaciones de Navier-Stokes (véase también [31] y [41]).
- Resultados de dato pequeño para $n = 3$ y con respecto a la viscosidad $\nu > 0$ (Leray [43], Fujita y Kato [27], Giga y Miyakawa [29], Kato [34], Weissler [62]): Si la norma $||u_0||_{H^{\frac{1}{2}}}$ (o la norma $L^3$) es suficientemente pequeña, entonces existe solución global.
- Criterios de singularidades (blow-up):
  Si $\nu > 0$,
$$\int_0^T \|u\|_{L^r}^k dt = \infty \Leftrightarrow \text{ singularidad a tiempo } T,$$
  donde $r, k$ verifican $\frac{2}{r} + \frac{3}{k} = 1$, para $3 < r \leq \infty$ (Leray [42], Giga [28], Ladyzhenskaya [39], Prodi [53] y Serrin [56]). El caso crítico $k = 3$ y $r = \infty$ se estableció recientemente por Escauriaza, Seregin y Sverak [25].
  Si $\nu = 0$, (Beale, Kato y Majda [3])
$$\int_0^T |\nabla \times u|_{L^\infty} dt = \infty \Leftrightarrow \text{ singularidad a tiempo } T.$$
  Estimaciones un poco más finas en espacios BMO se pueden encontrar en [37] y en [38].
- Las singularidades son aisladas, para $\nu > 0$ (Scheffer, 1976 [60]. Caffarelli, Kohn y Nirenberg, 1982 [5].) . Scheffer aplicó las técnicas de la teoría de geometría de la medida para estimar la dimensión Hausdorff del conjunto
$$\{(x,t) \in \Omega \times [0,T]; |u|_{L^\infty} = \infty\}.$$
  Su resultado fue luego mejorado por Caffarelli, Kohn y Nirenberg en 1982 (una demostración más sencilla se puede encontrar en [46]), obteniendo que, en particular, el conjunto de singularidades no puede tener lugar a lo largo de curvas de la forma
$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x = \phi(t)\}.$$
- Combinando técnicas analíticas de integrales singulares con argumentos geométricos, Constantin, Fefferman y Majda ([16] y [15]) probaron que si la

dirección del vector vorticidad $\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$ se mantiene lisa en regiones donde la vorticidad es alta, entonces no puede producirse una singularidad.
- En el caso $\nu > 0$, la existencia de una singularidad es equivalente a que la presión se haga $-\infty$ en el punto de singularidad (Sverak y Seregin, 2002 [55]).
- Hiperviscosidad (Ladyzhenskaya [40]): Para $\alpha \geq \frac{5}{4}$, cambiando $-\Delta$ por $(-\Delta)^{\alpha}$, hay existencia de soluciones globales.
- Existencia global de datos iniciales particulares: Recientemente Chemin, Gallagher y Paicu [11] prueban que en dimensión 3 (con $\nu > 0$) existen soluciones globales en el tiempo con dato inicial que no es pequeño.

## 6. La vorticidad y las ecuaciones de Euler: $\nu = 0$.

Uno de los conceptos más importantes en fluidos es la vorticidad que mide la rotación del flujo y se define como el rotacional del campo de velocidades $\omega = \nabla \times u$. Podemos citar a Leonardo Da Vinci 1510, quien se dio cuenta de la relevancia de la vorticidad en la dinámica de los fluidos:

> *Observad el movimiento de la superficie del agua, que se asemeja al del cabello, que tiene dos movimientos, de los cuales uno es causado por su propio peso y el otro por la dirección de los remolinos; por tanto el agua tiene movimientos rotatorios, una parte de los cuales se debe a la corriente principal, y la otra a un movimiento inverso y aleatorio.*

Al aplicar el rotor a las ecuaciones de Euler la presión desaparece y eso nos permite escribir el sistema en términos sólo de la vorticidad. En esta sección daremos una breve descripción de las diferencias entre las ecuaciones de Euler en dimensión 2 y 3.

### 6.1. Dimensión $n = 2$.

$$x \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} u_{1t} + u \cdot \nabla u_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta u_1, \\ u_{2t} + u \cdot \nabla u_2 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \Delta u_2, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Sea el escalar $w = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Derivamos la primera ecuación con respecto a la segunda variable y la segunda ecuación con respecto a la primera variable. Restando obtenemos

$$w_t + (u \cdot \nabla u_1)_{x_2} - (u \cdot \nabla u_2)_{x_1} = \nu \Delta w \Rightarrow w_t + u \cdot \nabla w = \nu \Delta w.$$

Como $\nabla \cdot u = 0$, existe una función de corriente $\psi$ tal que $u = (-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1})$ y por tanto $w = -\Delta \psi$ (ecuación de Poisson).

Estamos interesados en soluciones con energía finita y que sus derivadas decaen suficientemente rápido en el infinito. Podemos invertir el operador laplaciano y obtenemos

$$\psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| w(y,t) dy,$$

que al derivar da

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|} w(y,t) dy. \tag{6}$$

Además, volviendo a la ecuación original, se puede recuperar la presión $p$ de la velocidad

$$-\Delta p = (u \cdot \nabla u_1)_{x_1} + (u \cdot \nabla u_2)_{x_2} = u_{x_1} \cdot \nabla u_1 + u_{x_2} \cdot \nabla u_2.$$

Para el caso $\nu = 0$ se tiene una ecuación de transporte

$$w_t + u \cdot \nabla w = 0,$$

es decir, que la derivada de la vorticidad a lo largo de trayectorias es cero:

$$\omega(X(\alpha, t), t) = \omega_0(\alpha).$$

Así $\|w\|_{L^\infty}(t) = \|w\|_{L^\infty}(0)$. También al multiplicar por $w$ e integrar en el dominio obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} w(w_t + u \cdot \nabla w) dx = \int_{\mathbb{R}^2} w w_t dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |w|^2(t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |w|^2(0) dx,$$

y en general se puede obtener que todas las normas $L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ se conservan en tiempo $\|w\|_{L^p}(t) = \|w\|_{L^p}(0)$.

Aplicamos a la ecuación el operador gradiente ortogonal $\nabla^\perp = (-\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1})$

$$(\nabla^\perp w)_t + u \cdot \nabla(\nabla^\perp w) = (\nabla u) \cdot \nabla^\perp w$$

que también puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla\right) |\nabla \omega| = \alpha |\nabla \omega|$$

donde $\alpha$ es

$$\alpha = (\nabla u)\xi \cdot \xi$$

y $\xi$ es la dirección del vector $\nabla^\perp \omega$.

Continuando a partir de (6) se deduce que para $i = 1, 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} =& \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \frac{\partial w}{\partial y_i}(y,t) dy \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big) \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \frac{\partial w}{\partial y_i}(y,t) dy \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \Big(1 - \Gamma\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big)\Big) \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \frac{\partial w}{\partial y_i}(y,t) dy \\
=& I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

donde definimos una función $\Gamma(r) \in C^\infty$ que verifique $\Gamma(r) = 1$, si $r < 1$ y $\Gamma(r) = 0$, si $r > 2$. Es fácil comprobar que $|I_1| \leq c\delta|\nabla w|$. Por otro lado, integrando por partes

$$\begin{aligned}
|I_2| \leq& c \int_{|y|\geq 2\delta} \frac{|w(x+y,t)|}{|y|^2} dy \\
=& c \int_{k>|y|\geq 2\delta} \frac{|w(x+y,t)|}{|y|^2} dy + c \int_{|y|>k} \frac{|w(x+y,t)|}{|y|^2} dy \\
\leq& \|w\|_{L^\infty}(t) \log\delta + c_k \|w\|_{L^2}(t) = \|w\|_{L^\infty}(0) \log\delta + c_k \|w\|_{L^2}(0),
\end{aligned}$$

luego

$$|\nabla u|_{L^\infty} \leq c\delta|\nabla w|_{L^\infty} + c\log\delta + c.$$

Si $\delta = \frac{1}{|\nabla w|+1}$, sustituyendo se tiene

$$|\nabla u|_{L^\infty} \leq c\log(1 + |\nabla w|_{L^\infty}) + c.$$

Por lo tanto

$$\left| \frac{d}{dt} |\nabla\omega|_{L^\infty} \right| \leq C|\nabla\omega|_{L^\infty} \log(|\nabla\omega|_{L^\infty} + 1)$$

y $|\nabla\omega|_{L^\infty}$ está acotada por una doble exponencial en tiempo

$$|\nabla w|_{L^\infty}(t) \leq c e^{Ce^t}.$$

De este argumento puede concluirse que las derivadas de la velocidad están acotadas por una exponencial. Esta es la mejor cota superior que se conoce, siendo la existencia de soluciones con energía finita con crecimiento exponencial un problema abierto. En el artículo [23] el autor obtiene una cota inferior lineal: las derivadas de la velocidad crecen al menos linealmente en el tiempo.

**6.2. Dimensión $n = 3$.** Sea $\omega = \nabla \times u$ la vorticidad, y aplicando el rotor a las ecuaciones obtenemos:

$$\omega_t + \nabla \times (u \cdot \nabla u) = \nu\Delta\omega$$

de la que se deduce

$$x \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} \omega_t + u \cdot \nabla\omega = (\nabla u) \cdot \omega + \nu\Delta\omega, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot \omega = 0. \end{cases} \tag{7}$$

La ley de Biot-Savart nos permite escribir el sistema en función de la vorticidad: Si tomamos $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ tal que $-\Delta\psi = w$,

$$\psi(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{w(y,t)}{|x-y|} dy \qquad \text{(función de corriente)}.$$

Hacemos uso de las siguientes identidades, válidas para todo $\psi$,

- $\Delta\psi = \overbrace{-\nabla \times (\nabla \times \psi)}^{\alpha} + \overbrace{\nabla(\nabla \cdot \psi)}^{\beta}$;
- $\nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0$.

Se tiene entonces que

$$0 = \int \beta \cdot w = \int \alpha \cdot \beta + \int \beta^2 = \int \beta^2 \Rightarrow \beta = 0,$$

de forma que

$$w = -\nabla \times (\nabla \times \psi),$$

y, por tanto, $u = -\nabla \times \psi$, siendo $u \in L^2$ de divergencia nula, con lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{x-y}{|x-y|^3} \times w(y,t) dy \qquad \text{(Ley de Biot-Savart)}.$$

La diferencia crucial entre 2 y 3 dimensiones aparece en la evolución a lo largo de trayectorias de la vorticidad; en el caso de tres dimensiones la vorticidad satisface

$$\omega(X(\alpha,t),t) = \nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha).$$

En dimensión $n = 3$ las ecuaciones incomprensibles de Euler tienen la propiedad de que las líneas de vorticidad (curvas tangentes al vector vorticidad) se mueven con el fluido. Consideremos la curva lisa C= $\{y(s) \in \mathbb{R}^3 : 0 < s < 1\}$: diremos que es una línea de vorticidad a tiempo $t$ si es tangente a la vorticidad en cada uno de los puntos; eso quiere decir que

$$\frac{dy}{ds}(s) = \lambda(s)\omega(y(s),t), \text{ para algún } \lambda(s) \neq 0.$$

Una cuenta muy sencilla muestra que las líneas de vorticidad, de la solución de la ecuación incompresible tridimensional de Euler, se mueven con el fluido: la curva

$$C(t) = \{X(y(s),t) \in R^3 : 0 < s < 1\}$$

satisface

$$\frac{dX}{ds}(y(s),t) = \lambda(s)\omega(X(y(s),t))\text{para algún } \lambda(s) \neq 0.$$

Un tubo de vorticidad está formado por la unión de líneas de vorticidad. En las simulaciones numéricas se observa que estos tubos se doblan, tuercen y se contraen. Una singularidad puede formarse por la colisión de dos líneas de vorticidad, lo que significa que las trayectorias de dos partículas colisionen en tiempo finito.

Otra cantidad conservada localmente en el fluido es la circulación (Teorema de circulación de Kelvin): sea $C_0$ una curva parametrizada por $x(s)$ donde $s \in [0,1]$ y la curva $C_t$ está representada por $X(x(s),t)$. Definimos la circulación como la integral de línea

$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} u dl.$$

Entonces $\frac{d\Gamma_{C_t}}{dt} = 0$, se conserva en tiempo.

El operador $D_t \equiv \partial_t + u \cdot \nabla$ es la derivada con respecto al tiempo a lo largo de trayectorias y es natural hacer el siguiente argumento heurístico:

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega^2$$

ya que $\nabla u$ tiene el mismo orden que la vorticidad. Esta ecuación diferencial ordinaria produce singularidades en tiempo finito. Pero en realidad, $\nabla u$ es una convolución de la vorticidad con un núcleo homogéneo de orden -3 y con media cero en la esfera unidad. $\nabla u$ son integrales singulares de Calderón-Zygmund.

$$Tf(x) = \mathrm{vp}\int K(x-y)f(y)dy \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\geq\varepsilon} K(x-y)f(y)dy,$$

donde el núcleo $K(x)$ verifica:

- $K(\lambda x) = \lambda^{-n}K(x)$,
- $\int_{|x|=1} K(x)ds = 0$.

Algunas de las propiedades de este valor principal son:

1. $\|Tf\|_{L^p} \leq c_p\|f\|_{L^p}$ para cada $1 < p < \infty$;
2. en dimensión $n = 1$ sólo hay un operador con las propiedades exigidas: la transformada de Hilbert

$$Hf(x) = \mathrm{vp}\int \frac{f(y)}{x-y}dy$$

El criterio clásico para la formación de singularidades en fluidos es el teorema de Beale, Kato y Majda [3]:

$$\textit{Singularidad en tiempo } T \textit{ si, y sólo si, } \int_0^T |\omega|_{L^\infty}dt = \infty.$$

¿Puede la vorticidad hacerse infinita en tiempo finito? Con el objetivo de entender el desarrollo de singularidades en la vorticidad, con operadores no locales, en 1986 Constantin, Lax y Majda estudiaron el siguiente modelo en dimensión $n = 1$:

$$\begin{cases} w_t = (Hw)w, \\ w(x,0) = w_0, \\ u(x,t) = \int_{-\infty}^x w(y,t)dy. \end{cases} \tag{8}$$

que se puede integrar y obtener soluciones exactas. Aprovechando las propiedades de la transformada de Hilbert $Hf$ :

1. $Z(x) = Hw + iw$ es el valor de frontera de una función analítica en el semiplano inferior $H^- = \{z = x + iy : y < 0\}$ si $y \to 0$.
2. Si $Z(x) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ es analítica en $H^-$, haciendo $y \to 0$, entonces $\alpha(x,0) = H\beta(x,0)$.
3. $iZ(x,y) = -\beta(x,y) + i\alpha(x,y)$ es analítica, luego $H(Hf) = -f$.
4. $ZZ$ es analítica, $Z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + i2\alpha\beta$, luego $2H(fHf) = (Hf)^2 - f^2$;

$$H(2\alpha\beta) = 2H(H\beta\beta) = \frac{(H\beta)^2 - \beta^2}{2}.$$

Se deduce la ecuación de evolución de $H\omega$ y nos queda

$$\left\{\begin{array}{l}(Hw)_t = \frac{(Hw)^2-w^2}{2},\\ \\ w_t = (Hw)w.\end{array}\right. \tag{9}$$

Sea $Z = Hw + iw$, entonces

$$Z_t = \frac{Z^2}{2}.$$

Así, $Z(x,t) = \dfrac{z_0(x)}{1-\frac{1}{2}tz_0(x)}$ y por tanto

$$w(x,t) = \Im z = \frac{4w_0(x)}{(2-t(Hw_0)(x))^2 + t^2w_0^2(x)}.$$

Para todo dato inicial donde existe un punto $x_0$ tal que $w_0(x_0) = 0$ y $Hw_0(x_0) > 0$ (por ejemplo, para $Hw_0(x) = \cos x$) existen singularidades en tiempo finito.

Pero si a la derivada temporal le añadimos un término convectivo, de forma que la derivada de la velocidad sea una integral singular de la vorticidad, entonces no puede integrarse el sistema. En este caso las ecuaciones serían

$$\left\{\begin{array}{ll}w_t + auw_x = (Hw)w, & a \in \mathbb{R},\\ \\ u_x = Hw.\end{array}\right. \tag{10}$$

Recientemente, en [7] se demuestra que para todo $a \in \mathbb{R}$ existen soluciones autosimilares y la existencia de singularidades con dato inicial regular para el caso $a \leq 0$.

**6.3. Modelos bidimensionales.** Debido a las cancelaciones en el término nolineal de las ecuaciones de Euler en 2D, éstas no resultan ser un buen modelo para capturar las características correspondientes en 3D. La ecuación cuasi-geostrófica superficial y la ecuación de un fluido incomprensible en un medio poroso (Ley de Darcy) son dos sistemas cuyas velocidades (incompresibles) vienen dadas por integrales singulares:

Ecuación cuasi-geostrófica superficial (SQG)

$$\left\{\begin{array}{ll}q_t + u\cdot\nabla q = 0, & x \in \mathbb{R}^2,\\ \nabla\cdot u = 0, & \\ u = (-R_2q, R_1q), & \text{transformadas de Riesz,}\end{array}\right. \tag{11}$$

$$u_i(x,t) = \mathrm{vp}\int \frac{y_i}{|y|^3}q(x+y,t)dy.$$

Ecuación de medios porosos (IPM)

$$
\left\{
\begin{array}{l}
q_t + u\nabla q = 0, \\
\nabla \cdot u = 0, \\
u = \nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix},
\end{array}
\right.
\tag{12}
$$

$$u = \mathrm{vp}\int (\frac{-2y_1y_2}{|y|^4}, \frac{y_1^2 - y_2^2}{|y|^4})q(x+y,t)dy + \frac{1}{2}(0,q).$$

El escalar $q = q(x_1, x_2, t)$ representa la temperatura potencial (SQG) y la densidad del fluido (IPM). En los artículos [19] y [21] se realiza un estudio analítico y numérico de los dos sistemas.

Las derivadas del escalar $q$ tiene un comportamiento similar al de la ecuación de Euler 3D y se pueden escribir como

$$D_t(\nabla^{\perp}q) = (\nabla^{\perp}q)_t + u\cdot\nabla(\nabla^{\perp}q) = (\nabla u)\cdot\nabla^{\perp}q.$$

El vector $\nabla^{\perp}q = (-\frac{\partial q}{\partial x_2}, \frac{\partial q}{\partial x_1})$ desempeña el papel de la vorticidad $\omega = \nabla\times u$. Además $\nabla u$ son integrales singulares con respecto a $\nabla^{\perp}q$. La analogía también es geométrica; los vectores $\nabla^{\perp}q$ y $\omega$ son tangentes a las curvas de nivel de $q$ y a las líneas de vorticidad, respectivamente. Las líneas de vorticidad y las curvas de nivel de $q$ satisfacen la propiedad de moverse con el fluido.

Las normas $L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ del escalar $q$ están acotadas y eso implica que las normas $L^p$ $(1 < p < \infty)$ de la velocidad están acotadas con respecto al dato inicial. En el caso de las transformadas de Riesz (SQG), la norma $L^2$, la energía, se conserva. Los resultados analíticos conocidos, existencia local y criterios de formación de singularidades, son equivalentes a la teoría conocida de Euler 3D. En cuanto a la existencia de singularidades, a día de hoy, es un problema abierto.

¿Qué sucede si se añade un término de viscosidad del tipo disipativo $-(-\Delta)^{\alpha}$? En este caso no hay formación de singularidades para $\alpha \ge \frac{1}{2}$, véase Kiselev-Nazarov-Volberg [36] y Caffarelli-Vasseur [6].

## 7. Fluidos con frontera libre

Si la frontera del fluido se mueve con el flujo entonces la complejidad del sistema es más alta y hay que tener en cuenta la dinámica del dominio exterior. En estos casos, fluidos de una estructura simple y en dos dimensiones podrían desarrollar singularidades, no en el interior sino en la frontera. Ejemplos notables son las hojas de vorticidad, los parches de vorticidad, *water waves*, dos fluidos inmiscibles con diferentes características, etc... Para poder ilustrar con precisión este tipo de soluciones hay que introducir el concepto de solución débil que fue introducido por Leray con el objetivo de entender las singularidades o el comportamiento caótico de un fluido.

Entendemos por solución débil que para todo par de funciones $\eta$ y $\zeta$ regulares y de soporte compacto en $[0,T)\times\mathbb{R}^2$, i.e. en el espacio $C_c^{\infty}([0,T)\times\mathbb{R}^2)$, se verifiquen las igualdades

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \big(v\cdot(\eta_t + v\cdot\nabla\eta) + p\nabla\cdot\eta\big)dxdt + \int_{\mathbb{R}^2} v_0(x)\cdot\eta(x,0)dx = 0$$

y

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v\cdot\nabla\zeta dxdt = 0,$$

donde $v_0(x) = v(x,0)$ es el dato inicial.

En el caso de Euler la mera existencia de soluciones débiles carece de una teoría satisfactoria. En los últimos años ha habido un intenso interés en la comunidad por entender la existencia y comportamiento de soluciones con un dato general inicial en $L^2$. Hay solución al problema pero el campo de velocidades es una medida de Laplace-Young (véase [24]). Constantin, E y Titi [14] demostraron una condición de regularidad en 3D, en la cadena de espacios de Besov $v \in L^3([0,T]; B^{\alpha}_{3,\infty}) \cap C([0,T]; L^2)$ donde $\alpha > 1/3$, para que las soluciones débiles conserven energía (conjetura de Onsager). Un resultado similar pero en un espacio más fino, $L^3([0,T]; B^{1/3}_{3,c(\mathbb{N})}) \cap C([0,T]; L^2)$, se obtiene en [12].

Scheffer en [59] construyó una solución para este sistema tal que $u(x,t) \equiv 0$ para $|x|^2 + |t|^2 > 1$. Para $t < -1$ la solución es cero, luego hace un cambio dramático y deja de ser nula, y para $t > 1$ desaparece. La prueba de este resultado es larga, complicada y difícil de entender. En 1997, Shnirelman [58] dio una construcción más transparente en un dominio periódico $\mathbb{T}^2$. Esta solución es una función de $L^2(\mathbb{T}^2\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, con soporte compacto en el tiempo, no acotada y discontinua. Desde un punto de vista completamente distinto usando el cálculo variacional, De Lellis y Szèkelyhidi construyen soluciones débiles no triviales en $v(x,t) \in L^{\infty}_c([0,T]; L^2)$ desde el cero, enfocando el sistema como una inclusión diferencial (véase [22]).

Debido a la cancelación extra en 2D la solución débil de la ecuación de la vorticidad $w$ en dos dimensiones se puede definir como:

$$\int_\Omega \varphi(x,T)w(x,T)dx - \int_\Omega \varphi(x,0)w_0(x)dx = \int_0^T \int_\Omega (\varphi_t + u\nabla\varphi)wdxdt,$$

siendo válida para toda $\varphi \in C^\infty([0,T]\times\Omega)$ con soporte compacto y $u = K * w$, con $K = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2}$, el núcleo propio de la ley de Biot-Savart. Esta formulación se deduce de la ecuación clásica de la vorticidad sin más que multiplicar por $\varphi$, integrar y aplicar integración por partes. La existencia y unicidad para este modelo, en $L^1 \cap L^\infty$, la demostró por vez primera Yudovich [66].

A continuación damos una breve descripción de soluciones con frontera libre que, interpretadas en todo el espacio, son soluciones débiles de las ecuaciones de Euler, SQG y IPM.

**7.1. Parches de vorticidad.** La ecuación de la vorticidad en 2D tiene la propiedad fundamental de que las curvas de nivel se mueven con el fluido, i.e., que no se transfiere fluido a través de las curvas de nivel. Entonces una solución natural, con energía finita, es una región cerrada (acotada y conexa) $\Omega(t)$, donde la vorticidad $\omega$ es igual a 1 dentro de dicha región y 0 fuera,

$$\omega(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega(t), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega(t), \end{cases}$$

que evoluciona con la velocidad del fluido conservando el área inicial. Estas soluciones parten con un frente ya formado sobre la frontera de $\Omega(t)$ y se denominan *vortex patches*. Este tipo de soluciones fueron candidatas a soluciones con energía finita que desarrollan singularidades, en la interfase, en tiempo finito. Las ecuaciones del contorno son

$$u(x(s,t),t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_\Pi \log|x(s,t)-x(s',t)|\frac{\partial x}{\partial s}(s',t), ds'.$$

Aquí, $x(s,t)$ determina la posición de la frontera del dominio $\Omega(t)$, parametrizada con $s$. La dinámica de la evolución del contorno $\partial\Omega(t)$ viene dada por $\frac{dx(s,t)}{dt} = u(x(s,t),t)$. Las simulaciones numéricas indicaban la posibilidad de que la frontera perdiera su regularidad al cabo del tiempo. Pero el trabajo analítico primero de Chemin [10] y después de Bertozzi-Constantin [4] demostraron que la curvatura no podía crecer más rápidamente que una doble exponencial, lo que implica la existencia de soluciones globales.

Con ese afán de buscar singularidades de fluidos incompresibles se define la dinámica de $\alpha$-*patches* para una familia de ecuaciones que "interpola" las ecuaciones SQG y Euler 2D. Un $\alpha$-*patch* $(0<\alpha<1)$ consiste en una región $\Omega(t)$ de $\mathbb{R}^2$ (conexa y acotada) que se mueve con una velocidad dada por

$$u(x(s,t),t) = \frac{\theta_0}{2\pi}\int_\Pi \frac{\frac{\partial x}{\partial s}(s',t)}{|x(s,t)-x(s',t)|^\alpha}\, ds'.$$

Los $\alpha$-*patches* determinan soluciones débiles de la ecuación

$$(\partial_t + u\cdot\nabla)\,\theta = 0, \quad u = \nabla^\perp\psi, \qquad \theta = -(-\triangle)^{1-\alpha/2}\psi.$$

En el caso $\alpha = 1$, Rodrigo [54] ha demostrado la existencia local y unicidad de solución con dato $C^\infty$ usando argumentos de tipo Nash-Moser. F. Gancedo [30], en su tesis doctoral, ha probado la existencia local y unicidad en espacios de Sobolev para $0<\alpha\le 1$. Es un problema abierto la existencia o no de soluciones globales de $\alpha$-*patches*.

**7.2. Hojas de vorticidad.** En el ejemplo anterior la vorticidad toma valores constantes en diferentes dominios, siendo una de estas constantes distinta de cero. Las hojas de vorticidad se definen por ser soluciones débiles cuya vorticidad $\omega = \nabla\times v$ es una función delta sobre la curva $z(\alpha,t)$

$$\omega(x,t) = \varpi(\alpha,t)\delta(x - z(\alpha,t)),$$

esto es, $\omega$ es una medida definida por

$$<\omega,\eta> = \int \varpi(\alpha,t)\eta(z(\alpha,t))d\alpha,$$

donde $\eta(x)$ es una función test.

La hoja de vorticidad $z(\alpha,t)$ separa dos dominios de vorticidad cero (fluidos irrotacionales) y satisface las siguientes ecuaciones:

$$z_t(\alpha,t) = BR(z,\varpi)(\alpha,t) + c(\alpha,t)\partial_\alpha z(\alpha,t),$$

donde la integral de Birkhoff-Rott sobre la curva, que se obtiene directamente de la ley de Biot-Savart, viene dada por

$$BR(z,\varpi)(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{vp}\int \frac{(z(\alpha,t)-z(\beta,t))^{\perp}}{|z(\alpha,t)-z(\beta,t)|^2}\varpi(\beta,t)d\beta. \tag{13}$$

Mientras que $c(\alpha,t)$ representa una re-parametrización de la curva. Cerramos el sistema usando las ecuaciones de Euler:

$$\varpi_t = \partial_\alpha(c\,\varpi).$$

Lebeau y Kamotski [35] demostraron que, en el caso de energía finita (i.e. que la amplitud de vorticidad $\varpi$ cambia de signo), la solución tiene que ser necesariamente $C^\infty$. Y si la amplitud es estrictamente positiva en todo el dominio entonces la solución es analítica (véase [65]). El primero en observar la posible formación de singularidades con dato inicial analítico fue Moore [50].

**7.3. Olas *(Water waves)*.** Se trata (véase [1]) de la evolución de la frontera libre entre una masa de agua y el vacío, gobernados por la ecuación de Euler y la fuerza de la gravedad:

$$\rho(v_t + (v\cdot\nabla)v) = -\nabla p - (0, g\rho),$$

donde $v$ es un campo de velocidades incompresible e irrotacional, por lo que la vorticidad está concentrada sobre la frontera libre debido al salto de densidades. La interfase y la amplitud de la vorticidad satisface las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} z_t(\alpha,t) &= BR(z,\varpi)(\alpha,t) + c(\alpha,t)\partial_\alpha z(\alpha,t),\\ \varpi_t(\alpha,t) &= -2\partial_t BR(z,\varpi)(\alpha,t)\cdot\partial_\alpha z(\alpha,t) - \partial_\alpha\Big(\frac{|\varpi|^2}{4|\partial_\alpha z|^2}\Big)(\alpha,t)\\ &\quad + \partial_\alpha(c\,\varpi)(\alpha,t) + 2c(\alpha,t)\partial_\alpha BR(z,\varpi)(\alpha,t)\cdot\partial_\alpha z(\alpha,t) + 2\mathrm{g}\partial_\alpha z_2(\alpha,t).\end{aligned}$$

Para este modelo, en [64], se probó por primera vez la existencia local (en el tiempo) de soluciones cuando la curva inicial no es necesariamente un grafo (para otras demostraciones y referencias véase [1]) y en [8] se demuestra que la propiedad de que la solución pueda ser parametrizada como un grafo no se preserva en el tiempo.

Las simulaciones numéricas, por ejemplo en [2], dan evidencias de que estas soluciones son candidatas a formar singularidades.

**7.4. Muskat.** El problema de Muskat modela la evolución de una interfase entre dos fluidos con diferentes viscosidades y densidades en un medio poroso utilizando la ley de Darcy

$$\frac{\nu}{\kappa}v = -\nabla p - (0, g\rho)$$

donde $v$ es la velocidad (incompresible), $p$ es la presión, $\nu$ es la viscosidad, $\kappa$ es la permeabilidad del medio isotrópico, $\rho$ es la densidad del fluido y $g$ es la aceleración de la gravedad. Este problema es matemáticamente análogo al flujo en una celda de Hele-Shaw.

Cuando se considera la tensión superficial, estos problemas de frontera libre pueden ser modelados usando la condición de Laplace-Young, es decir, imponiendo que la diferencia de las presiones a lo largo de la interfase sea igual a la curvatura media local multiplicada por la tensión superficial. Con tensión superficial, en el caso bidimensional, los problemas tienen soluciones clásicas. Sin tensión superficial las presiones de los fluidos son iguales sobre la interfase, y en este caso el problema está bien propuesto (véase [20]) si inicialmente la diferencia de la derivada normal a la interfase de las presiones (a ambos lados de la interfase) tiene signo positivo. Si el signo es negativo el sistema es inestable.

El objetivo final de estas notas es dar un ejemplo de fluido incompresible y de energía finita que, partiendo de un escenario estable y dato inicial regular, desarrolle singularidades en tiempo finito. El problema de Muskat, en el caso de dos fluidos de igual viscosidades y distintas densidades, reúne estas condiciones. Hay existencia global de solución en $W^{1,\infty}$ (para el caso estable) si el dato inicial cumple $||f_0||_{L^\infty} < \infty$ y $||\partial_x f_0||_{L^\infty} < 1$, donde la interfase se parametriza como el grafo $(x, f(x))$. También hay un principio del máximo para la norma $L^2$ de la solución y satisface una fórmula explícita del balance de energía:

$$||f||^2_{L^2}(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \log\left(\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)^2}\right) d\alpha dx dt = ||f_0||^2_{L^2}.$$

En el trabajo [8] se demuestra que existen datos iniciales tales que

$$\lim_{t\to T} ||\partial_x f||_{L^\infty}(t) = \infty,$$

para cierto $T$ finito que depende del dato inicial. Una vez que la interfase deja de ser un grafo pasa a un sistema inestable y la curva pierde la regularidad inicial.

## Referencias

[1] C. Bardos y D. Lannes, Mathematics for 2d interfaces. arXiv:1005.5329

[2] J.T. Beale, T. Y. Hou y J. Lowengrub, Convergence of a boundary integral method for water waves, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), no. 5, 1797–1843,

[3] J.T. Beale, T. Kato y A. Majda, Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations, *Comm. Math. Phys.* **94** (1984), no. 1, 61–66.

[4] A. Bertozzi y P. Constantin, Global regularity for vortex patches, *Comm. Math. Phys.* **152** (1) (1993), 19–28.

[5] L. Caffarelli, R. Kohn y L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 6, 771–831.

[6] L. Caffarelli y A. Vasseur, Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation, *Annals of Math.* **171** (2010), no. 3, 1903–1930.

[7] A. Castro, Non linear and non local models in fluid mechanics, *Tesis doctoral*, Universidad Autónoma de Madrid, 2010.

[8] A. Castro, D. Córdoba, C. Fefferman, F. Gancedo y M. López-Fernández, Turning waves and breakdown for incompressible flows, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **108** (2011), no. 12, 4754–4759.

[9] D. Chae, Incompressible Euler equations: the blow-up problem and related results, *Handbook of differential equations: evolutionary equations.* Vol. IV, 1–55, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[10] J. Y. Chemin, Persistence of geometric structures in two-dimensional incompressible fluids, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* **26** (4) (1993), 517–542.

[11] J. Y. Chemin, I. Gallagher y M. Paicu, Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations, *Annals of Math.* **173** (2011), no. 2, 983–1012.

[12] A. Cheskidov, P. Constantin, S. Friedlander y R. Shvydkoy, Energy conservation and Onsager's conjecture for the Euler equations, *Nonlinearity* **21** (2008), no. 6, 1233–1252.

[13] P. Constantin, Euler and Navier-Stokes equations, *Publ. Mat.* **52** (2008), no. 2, 235–265.

[14] P. Constantin, W. E y E. Titi, Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 207–209.

[15] P. Constantin y C. Fefferman, Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 3, 775–789.

[16] P. Constantin, C. Fefferman y A. Majda, Geometric constraints on potentially singular solutions for the 3-D Euler equations, *Comm. Partial Differential Equations* **21** (1996), no. 3-4, 559–571.

[17] P. Constantin y C. Foias, Navier-Stokes equations, *Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago press, Chicago*, 1988.

[18] P. Constantin, P. Lax y A. Majda, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985), no. 6, 715–724.

[19] P. Constantin, A. J. Majda y E. Tabak, Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar, *Nonlinearity* **7** (1994), 1495–1533.

[20] A. Córdoba, D. Córdoba y F. Gancedo, Interface evolution: the Hele-Shaw and Muskat problems, *Annals of Math* **173**, 1, (2011), 477–544.

[21] D. Córdoba, F. Gancedo y R. Orive, Analytical behaviour of 2D incompressible flow in porous media, *Journal of Math. Phys.* 2007, no. 6, 065206, 19 pp.

[22] C. De Lellis y Jr. L. Szèkelyhidi, The Euler equations as a differential inclusion, *Annals of Math.* **170** (2009), 1417–1436.

[23] S. A. Denissov, Infinite superlinear growth of the gradient for the two-dimensional Euler equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **23** (2009), no. 3, 755–764.

[24] R. J. DiPerna y A. J. Majda, Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations, *Commun. Math. Phys.* **108** (1987), 667–689.

[25] L. Escauriaza, G. A. Seregin y V. Sverak, L3,8-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness. (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), no. 2(350), 3–44; translation in Russian *Math. Surveys* **58** (2003), no. 2, 211–250.

[26] C. Fefferman, *Clay Mathematics Institute, Millenium problems.*

[27] H. Fujita y T. Kato On the Navier-Stokes initial value problem. I, *Arch. Rational Mech. Anal.* **16** (1964), 269–315.

[28] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in $L^p$ and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *J. of Diff. Equations* **62** (1986), 186–212.

[29] Y. Giga y T. Miyakawa, Solutions in $L^r$ of the Navier-Stokes initial value problem, *Arch. Rational Mech. Anal.* **89** (1985), 267–281.

[30] F. Gancedo, Existence for the $\alpha$-patch model and the QG sharp front in Sobolev spaces, *Advances in Math.* **217** (2008), no. 6, 2569–2598.

[31] E. Hopf, Uber die Anfangswertaufgabe fur die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachrichten* **4** (1951), 213–231.

[32] T. Kato, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$, J. Funct. Analysis **9** (1972), 296–305.

[33] T. Kato, On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **25** (1967), 188–200.

[34] T. Kato, Strong $L^p$ solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.* **187** (1984), 471–480.

[35] V. Kamotski y G. Lebeau, On 2D Rayleigh-Taylor instabilities, *Asumplot. Anal.* **42** (2005), 1–27.
[36] A. Kiselev, F. Nazarov y A. Volberg, Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation, *Invent. Math.* **167** (2007), no. 3, 445–453.
[37] H. Kozono y Y. Taniuchi, Bilinear estimates in $BMO$ and the Navier-Stokes equation, *Math. Z.* **235** (2000), no. 1, 173–194.
[38] H. Kozono y Y. Taniuchi, Limiting case of the Sobolev inequality in $BMO$, with application to the Euler equations, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), no. 1, 191–200.
[39] O. A. Ladyzhenskaya, On uniqueness and smoothness of generalized solutions to the Navier-Stokes equations, *Zapiski Nauchnich Seminarov LOMI* **5** (1967), 169–185.
[40] O. A. Ladyzhenskaya, On some modifications of the Navier-Stokes equations for large gradients of velocity, *Zapiski Nauchnich Seminarov LOMI* **7** (1968), 126–154.
[41] O.A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscuous incompressible flow, *Gordon and Breach*, London, 1969.
[42] J. Leray, Etude de divereses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math Pures Appl.* **12** (1933), 1–82.
[43] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* **63** (1934),193–248.
[44] J. Leray, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *Jour. Math. Pures Appl.* **13** (1934), 331–418.
[45] L. Lichtenstein, Über einige Esixtenzprobleme der Hydrodynamik homogener unzusammendrückberer, reinbunglosser Flüssikeiten und die Helmholtzschen Wirbelsalitze, *Mat Zeit.* **23** (1925), 89–154; **26** (1927), 193–323, 387–415, 725; **32** (1930), 608.
[46] F. Lin, A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem, *Comm. Pure. Appl. Math.* **51** (1998), 241–257.
[47] P.L. Lions, Mathematical topics in fluid mechanics, *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. The Clarendon Press Oxford University Press* **3**, 1996.
[48] A. Majda y A. Bertozzi, Vorticity and incompressible flows, *Cambridge Univ. Press*, 2002.
[49] C. Marchioro y M. Pulvirenti, Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids, *Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Nueva York* **96**, 1994.
[50] D. W. Moore, The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **365** (1979), 105–119.
[51] B. Muckenhoupt y E. M. Stein, Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 17–92.
[52] C.L.M.H. Navier, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mem. Acad. Sci. Inst. France* **6** (1822), 380–440.
[53] G. Prodi, Un teorema di unicita per el equazioni di Navier-Stokes, *Ann. Mat. Pura Appli.* **48** (1959), 173–182.
[54] J.L. Rodrigo, On the evolution of sharp fronts for the Quasi-geostrophic equation. Aceptado en *Comm. Pure Appl. Math.*
[55] G. Seregin y V. Sverák, Navier-Stokes equations with lower bounds on the pressure, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **163** (2002), no. 1, 65–86.
[56] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **9** (1962), 187–195.
[57] J. Serrin, The initial value problem for the Navier-Stokes equations, *Nonlinear Problems (R. Langer ed.)*, 69–98, Madison: The University of Wisconsin press, 1963.
[58] A. Shnirelman, On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), no. 12, 1261–1286.
[59] V. Scheffer, An inviscid flow with compact support in space-time, *J. Geom. Anal.* **3** (1993), no. 4, 343–401.
[60] V. Scheffer, Hausdorff measure and the Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), no. 2, 97–112.
[61] G. G. Stokes, On the theories of internal friction of fluids in motion, *Trans. Cambridge. Philos. Soc.* **8** (1845), 287–305.

[62] F. B. Weissler, The Navier-Stokes initial value problem in $L^p$, *Arch. Rational Mech. Anal.* **74** (1980), 219–230.

[63] W. Wolibner, Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, *Mathematische Zeitschrift* **37** (1933), 698–726.

[64] S. Wu, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D, *Invent. Math.* **130** (1997), no. 1, 39–72.

[65] S. Wu, Mathematical analysis of vortex sheets, *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006), 1065-1206.

[66] V. Yudovich, Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal, incompressible fluid, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), 27–38.

Instituto de Ciencias Matemáticas-CSIC, C/ Nicolás Cabrera, nº 13-15, Campus Cantoblanco, UAM, 28049 Madrid

*Correo electrónico*: dcg@icmat.es

*URL*: http://www.icmat.es/user/14