JORNADAS SOBRE LOS
PROBLEMAS DEL MILENIO
Barcelona, del 1 al 3 de junio de 2011

LA CONJETURA DE HODGE

VICENTE MUÑOZ*

RESUMEN. La conjetura de Hodge fue planteada inicialmente por W. Hodge en el *International Congress of Mathematicians* de 1950 en Cambridge [4] y permanece abierta desde entonces. Es uno de los siete Problemas del Milenio [11], por cuya solución se ofrece un millón de dólares.

En estas páginas, daremos el enunciado de la conjetura de Hodge, explicaremos la motivación de la misma, y comentaremos las expectativas de que pueda ser resuelta positiva o negativamente.

La conjetura de Hodge fue propuesta por W. Hodge en 1950, y permanece a día de hoy como problema abierto. Ha sido incluida en la lista de los siete Problemas del Milenio [11] con los que el *Clay Mathematics Institute* (Cambridge, Massachussets, EEUU) ha querido celebrar el nuevo milenio, dotándolos de un premio de un millón de dólares a cada uno.

La conjetura de Hodge se enmarca en una zona de las matemáticas donde interaccionan las áreas de la geometría algebraica y la geometría diferencial, y donde además se recogen ideas que provienen de la geometría aritmética (conjeturas estándar de Grothendieck, teoría de motivos, ...), la topología algebraica, la física matemática (teorías *gauge, mirror symmetry*), la geometría compleja, o la teoría de ecuaciones diferenciales en variedades. Es por tanto, un problema de enorme interés por sus múltiples conexiones con diversas áreas, y que ha sido motor de notables avances en geometría. No obstante, no hay una idea clara de qué línea de ataque llevará a su solución, ni siquiera de si la respuesta llegará usando técnicas de geometría algebraica, o con técnicas analíticas de geometría diferencial. Es más, hay bastante división en la creencia de que pueda ser probada o refutada.

1. Nociones básicas

Comenzaremos explicando las nociones necesarias de geometría diferencial y de topología algebraica para poder enunciar con posterioridad la conjetura de Hodge.

1.1. Homología. La homología de un espacio es un concepto que nos permite estudiar los subobjetos que se encuentran dentro del espacio de una forma algebraica y muy manejable. Este concepto fue introducido por Poincaré en 1895 en su tratado *Analysis Situs* [6].

Consideramos un espacio topológico X. La homología es un invariante algebraico que cuenta los agujeros de X. Comenzamos definiendo los *k-símplices* ($k \in \mathbb{N}$)

*El autor quiere agradecer a Giovanni Bazzoni por la ayuda prestada en la preparación de estas notas.

como las aplicaciones continuas

$$S : [0,1]^k \to X\,.$$

Decimos que un k-símplice es degenerado si sólo depende de $k-1$ de las variables.

Si $\{S_i\}_i$ es el conjunto de todos los k-símplices no degenerados, se pueden considerar sumas formales finitas con coeficientes enteros

$$T = \sum n_i S_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}\,, \tag{1}$$

a las que denominaremos k-cadenas. Éstas forman un grupo abeliano, llamado *grupo de las k-cadenas*,

$$C_k(X) = \left\{ T = \sum n_i S_i,\ S_i \text{ son } k\text{-símplices} \right\}.$$

El borde de un k-símplice se define como la suma formal (con signos, dependiendo de la orientación) de los $(k-1)$-símplices que aparecen en el borde (topológico) de $[0,1]^k$, y es por tanto una $(k-1)$-cadena. Así tenemos definido un operador borde

$$\partial : C_k(X) \to C_{k-1}(X)\,,$$

y a través del borde podemos definir el subgrupo de los *k-ciclos*

$$Z_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid \partial T = 0\}\,.$$

Los ciclos se corresponden intuitivamente con figuras (divididas en k-símplices) que no tienen borde.

Los k-ciclos son útiles para detectar "agujeros" en X. Un agujero se rodea con un k-ciclo. Si un k-ciclo T no rodea ningún agujero, entonces intuitivamente hay "espacio" dentro del k-ciclo, es decir, hay una $(k+1)$-cadena $T' \in C_{k+1}(X)$ cuyo

Jules Henri Poincaré (1854-1912).

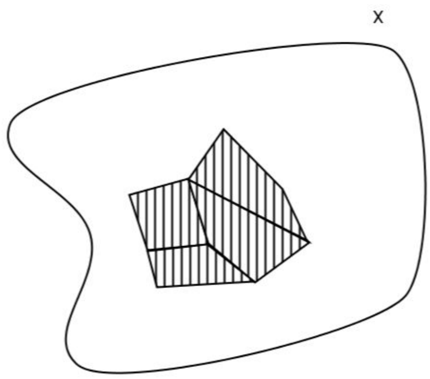


FIGURA 1. Cadenas en X.

borde es $\partial T' = T$. Por otro lado, si T_1, T_2 son dos k-ciclos, y $T_1 - T_2 = \partial T'$, entonces T_1 y T_2 rodean el mismo agujero.

Definimos el subgrupo de los *k-bordes* como

$$B_k(X) = \{T \in C_k(X) \mid T = \partial T',\ T' \in C_{k+1}(X)\}\,.$$

De la relación $\partial^2 = 0$ se sigue que $B_k(X) \subset Z_k(X)$, y por tanto el cociente $Z_k(X)/B_k(X)$ nos dice qué agujeros tiene X.

Definición 1.1. *Llamamos grupo de homología singular de grado k de X a*

$$H_k(X, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}, \tag{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

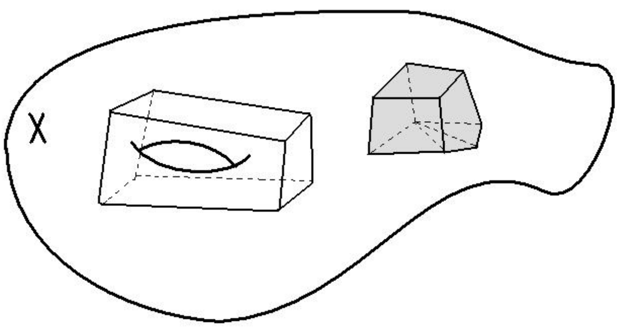


FIGURA 2. Un k-ciclo que rodea un agujero y un k-borde.

La homología $H_k(X,\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano y, geométricamente, calcula los agujeros de X. Cada elemento de $H_k(X,\mathbb{Z})$ es de la forma $[T]$, donde T es un k-ciclo. Además $[T]=0$ si y sólo si T es un k-borde.

Si se utilizan coeficientes en un cuerpo $\mathbf{k}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$, en la definición (1), se obtiene la homología singular racional, real o compleja

$$H_k(X,\mathbf{k}) = H_k(X,\mathbb{Z})\otimes \mathbf{k}\,.$$

La homología sobre $\mathbf{k}$ evita problemas con la parte de torsión de la homología. Si $H_k(X,\mathbb{Z})\cong \mathbb{Z}^r\oplus\mathbb{Z}_{a_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{a_d}$, entonces $H_k(X,\mathbf{k})\cong\mathbf{k}^r$. Si $[T]\in H_k(X,\mathbb{Z})$ es un elemento de torsión, es decir $[T]$ pertenece al sumando $\mathbb{Z}_{a_1}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}_{a_k}$, entonces T no es un k-borde, pero existe un natural $N\in\mathbb{N}$ tal que $N\,[T]=0$, y por tanto $N\,T$ es un k-borde.

1.2. Formas diferenciales. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Las variedades diferenciables son espacios topológicos que son localmente como $\mathbb{R}^n$, y en los que se pueden definir funciones diferenciables. Por definición, para una variedad diferenciable, cada punto p tiene un entorno abierto $U\subset M$ que es homeomorfo a un abierto $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$ y, además, las funciones diferenciables de M en U se corresponden con las funciones diferenciables de $\tilde{U}$. Al homeomorfismo $\psi: U\to\tilde{U}$ se le denomina *carta* de M. Permite asignar a cada punto $q\in U$, sus coordenadas $\psi(q)=(x_1,\ldots,x_n)$.

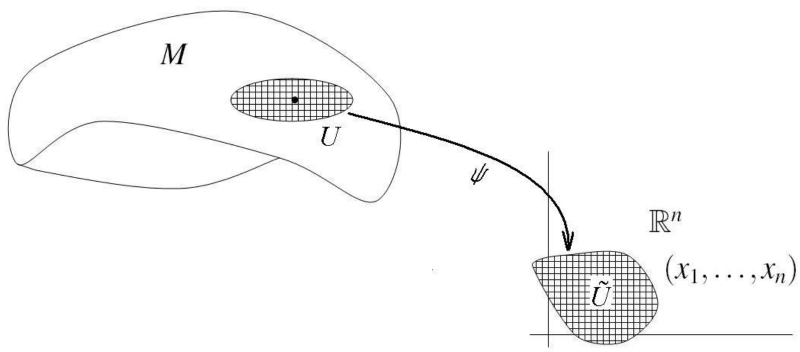


FIGURA 3. Variedad con una carta.

Denotamos por $\Omega^k(M)$ el espacio de las *k-formas* en M. Una 1-forma $\alpha\in\Omega^1(M)$ se escribe, en una carta, como

$$\alpha(x)=\sum_{i=1}^n f_i(x)dx_i,$$

para algunas funciones $f_i(x)$. En el caso de las k-formas, tenemos que $\alpha \in \Omega^k(M)$ se escribe como

$$\alpha(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} ,$$

con coeficientes $f_{i_1\ldots i_k}(x)$, que son $\binom{n}{k}$ funciones. Es conveniente usar multi-índices. Un multi-índice $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ es un subconjunto $I \subset \{1, \ldots, n\}$ de longitud $|I| = k$. Abreviaremos $dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ y $f_{i_1\cdots i_k} = f_I$, con lo que queda

$$\alpha = \sum_{|I|=k} f_I \, dx_I \, .$$

La diferencial exterior es un operador

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

definido de la siguiente manera: Sobre funciones $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, d coincide con la diferencial usual en funciones, es decir

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \in \Omega^1(M) \, .$$

Para una forma $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I \, dx_I$ de grado k, tomamos

$$d\alpha = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^{k+1}(M).$$

Definimos los siguientes subespacios de $\Omega^k(M)$:

$$Z^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid d\alpha = 0\}$$

consistente de las *formas cerradas*. Y

$$B^k(M) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \mid \alpha = d\beta\}$$

consistente de las *formas exactas*. La diferencial exterior también satisface $d^2 = 0$ y esto implica que $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Definición 1.2. *Definimos los grupos de cohomología de De Rham como*

$$H^k(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)} \, .$$

La cohomología de De Rham nos da la obstrucción a que una forma cerrada sea exacta.

1.3. Dualidad de De Rham. De Rham (1931) observó la siguiente dualidad entre cohomología y homología

$$\begin{array}{rcl} H^k(M) & \cong & H_k(M, \mathbb{R})^* \\ \alpha & \mapsto & I_\alpha \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} I_\alpha : H_k(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ T = \sum \lambda_i S_i &\mapsto \int_T \alpha = \sum \lambda_i \int_{S_i} \alpha \,. \end{aligned}$$

Veamos que esta aplicación está bien definida. Si $\alpha = \sum f_I \, dx_I \in \Omega^k(M)$, entonces, para un k-símplice $S : I^k \to M$ se define

$$\int_S \alpha = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_I \circ S(u) \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

con $(x_1, \ldots, x_n) = S(u_1, \ldots, u_k)$. Aquí nos vemos obligados a usar k-símplices diferenciables, pero la teoría también funciona en este caso. El Teorema de Stokes asegura que

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha,$$

luego la aplicación $\Omega^k(M) \otimes C_k(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(\alpha, S) \mapsto \int_S \alpha$, induce una aplicación $H^k(M) \otimes H_k(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

1.4. Dualidad de Poincaré. Sea M una variedad *compacta* y *orientada* de dimensión n. Con estas hipótesis podemos integrar n-formas en M. Si una n-forma es exacta $\omega = d\beta$, entonces el Teorema de Stokes nos asegura que

$$\int_M \omega = \int_M d\beta = \int_{\partial M} \beta = 0 \,,$$

puesto que $\partial M = \emptyset$. Por tanto, tenemos bien definida la aplicación

$$\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R} \,.$$

Georges de Rham (1903-1990).

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \otimes H^{n-k}(M) & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

es una aplicación bilineal que da una *dualidad* (también llamada *pairing perfecto*). Esto quiere decir que hay un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} PD : H^k(M) & \cong & H^{n-k}(M)^* \\ \alpha & \mapsto & \int_M \alpha \wedge (\cdot) \end{array}$$

al que se le conoce con el nombre de *dualidad de Poincaré*. Nótese que si $\alpha \neq 0$, entonces existe β tal que $\int_M \alpha \wedge \beta \neq 0$.

Combinando la dualidad de De Rham con la dualidad de Poincaré, tenemos un isomorfismo

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M, \mathbb{R})\,. \tag{3}$$

En particular, podemos definir una clase de cohomología asociada a una subvariedad. Sea $S \subset M$ una subvariedad compacta y orientada de codimensión k, es decir $\dim S = n - k$. Triangulando S obtenemos una clase de homología

$$[S] \in H_{n-k}(M, \mathbb{Z}).$$

Si miramos esta clase de homología, a través de (3), como un elemento de $H^k(M)$, deducimos que existe $\alpha_S \in \Omega^k(M)$ tal que $PD[S] = [\alpha_S]$.

La idea geométrica detrás de esto es la siguiente: S define una corriente (una k-forma del estilo *delta de Dirac*) con soporte en S. A esta corriente se la denomina *corriente de integración a lo largo de* S, $\int_S$, porque asigna a cada forma su integral a lo largo de S. Recordemos que una delta de Dirac se puede “regularizar” con funciones diferenciables $\rho_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Este método se generaliza para regularizar la corriente $\int_S$ a una k-forma $\alpha_S \in \Omega^k(M)$, a la que se denomina *forma de Thom*.

René Thom (1923-2002).

1.5. Variedades complejas. La definición de variedad compleja es análoga a la de variedad diferenciable si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$. Es decir, una variedad compleja tiene cartas $\psi : U \to \tilde{U}$, donde $U \subset M$ y $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$, con lo cual tenemos coordenadas complejas $(z_1, \ldots, z_n)$. Además, en M tiene sentido el concepto de función holomorfa, que es aquélla que, a través de la carta, se puede escribir en coordenadas como $f(z_1, \ldots, z_n)$, donde f es una función holomorfa de n variables complejas.

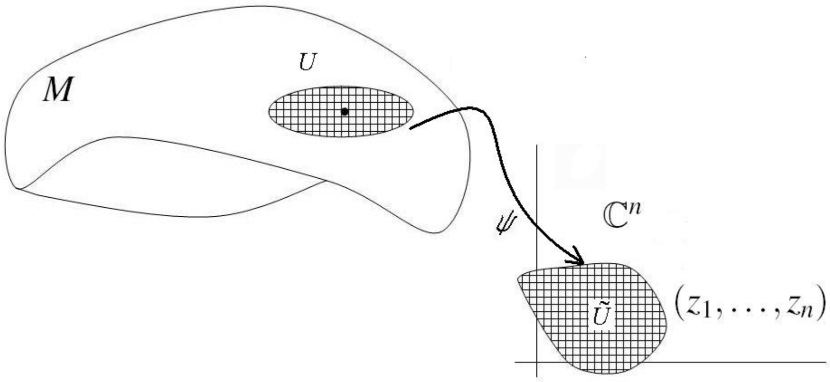


FIGURA 4. Variedad compleja.

Trabajando en una carta, con coordenadas $(z_1, \ldots, z_n)$, escribimos

$$z_i = x_i + \mathbf{i}\, y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ dan una colección de $2n$ coordenadas reales, y M es también una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Vamos a considerar una clase especial de variedades complejas: las *variedades proyectivas*. Sea $P^N(\mathbb{C})$ el espacio proyectivo complejo de dimensión N, que es una variedad diferenciable de dimensión $2N$. Tomamos coordenadas homogéneas $[z_0 : \ldots : z_N]$ en $P^N(\mathbb{C})$ y consideramos una colección $F_1, \ldots, F_d$ de polinomios homogéneos en $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_N]$. Consideramos el conjunto de ceros

$$\begin{aligned} S &= \{[z_0 : \ldots : z_N] \in P^N(\mathbb{C}) \mid F_1(z_0, \ldots, z_N) = \ldots = F_d(z_0, \ldots, z_N) = 0\} \\ &\subset P^N(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Si S es no singular, entonces es una variedad compleja. A estas variedades se las denomina *variedades proyectivas*.

1.6. Cohomología de Dolbeault. Sea M una variedad compleja. El espacio de las (p, q)-formas $\Omega^{p,q}(M) \subset \Omega^k(M, \mathbb{C})$ se define de la siguiente manera. Comenzamos considerando k-formas complejas, es decir k-formas que localmente se escriben como $\alpha = \sum_{|I|=k} f_I(z)dz_I$, donde $f_I : U \to \mathbb{C}$. El espacio de dichas formas se denota $\Omega^k(M,\mathbb{C})$.

Ahora tomamos coordenadas locales $(z_1,\dots,z_n)$ en un abierto. Por tanto, tenemos coordenadas reales $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$. Las 1-formas se escriben en función de $dx_1,dy_1,\dots,dx_n,dy_n$. Si ponemos

$$dz_j = dx_j + \mathbf{i}\, dy_j \quad \text{y} \quad d\overline{z}_j = dx_j - \mathbf{i}\, dy_j\,,$$

podemos escribir las 1-formas en función de $dz_j, d\overline{z}_j$, $j=1,\dots,n$. Ahora, una (p,q)-forma es una k-forma, con $k=p+q$, que se puede escribir como

$$\alpha = \sum f_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}(z)dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\dots\wedge d\overline{z}_{j_q}\,.$$

De nuevo, abreviaremos usando multi-índices $I=\{i_1,\dots,i_p\}$, $J=\{j_1,\dots,j_q\}$. Pondremos $dz_I = dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_p}$ y $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1}\wedge\dots\wedge d\overline{z}_{j_q}$, con lo que

$$\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}\, dz_I\wedge d\overline{z}_J\,.$$

Una función f definida sobre M se puede escribir tanto en coordenadas reales, $f(z)=f(x_j,y_j)$, como en coordenadas complejas, $f(z)=f(z_j,\overline{z}_j)$. En esta segunda notación, tenemos

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j = \partial f + \overline{\partial} f.$$

Así aparecen dos operadores diferenciales, ∂ y $\overline{\partial}$, que actúan en el espacio de las (p,q)-formas:

$$\begin{aligned} \partial : \Omega^{p,q}(M) &\to \Omega^{p+1,q}(M),\\ \overline{\partial} : \Omega^{p,q}(M) &\to \Omega^{p,q+1}(M). \end{aligned}$$

En coordenadas locales, si $\alpha = \sum f_{IJ}\, dz_I\wedge d\overline{z}_J \in \Omega^{p,q}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial z_j}\, dz_j\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J\\ \overline{\partial}\alpha &= \sum \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \overline{z}_j}\, d\overline{z}_j\wedge dz_I\wedge d\overline{z}_J \end{aligned}$$

y $d\alpha = \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha$.

Denotamos ahora por $\boldsymbol{\Omega}^p(M)$ el haz de las *p-formas holomorfas* sobre la variedad compleja M. En cada abierto $U\subset M$, éstas son p-formas diferenciales en las que no aparecen las diferenciales $d\overline{z}_j$, esto es,

$$\alpha = \sum f_I(z)dz_I\,,$$

y tales que las f_I son funciones holomorfas. Tenemos una resolución de haces

(4)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{p,0} \arrow[r, "\overline{\partial}"] & \Omega^{p,1} \arrow[r, "\overline{\partial}"] & \dots \arrow[r, "\overline{\partial}"] & \Omega^{p,n} \arrow[r] & 0\,. \\
\boldsymbol{\Omega}^p \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.3. *Se definen los grupos de cohomología de Dolbeault de M como los grupos de cohomología asociados a la resolución (4):*

$$H^{p,q}(M) = H^q(\Omega^{p,\bullet}, \overline{\partial}) = \frac{\ker(\overline{\partial} : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1})}{\mathrm{Im}\,(\overline{\partial} : \Omega^{p,q-1} \to \Omega^{p,q})} = H^q(M, \mathbf{\Omega}^p).$$

(La primera igualdad es una definición y la última es una consecuencia de la teoría de haces.)

1.7. Variedades Kähler. Sea M una variedad compleja. Sea

$$h = \sum h_{jk}(z)\, dz_j\, d\overline{z}_k$$

una métrica hermítica en el fibrado tangente TM.

Esto quiere decir que, localmente, $h(z) = (h_{jk}(z))$ es una matriz hermítica, $h(z)^t = \overline{h(z)}$, y definida positiva, es decir, el producto hermítico $h_z(u,v) = u^t h(z)\overline{v}$, $u, v \in \mathbb{C}^n$, es definido positivo.

La métrica hermítica nos da:

1. Una métrica riemanniana $g = \mathrm{Re}(h)$. Es decir, $g_z(u,v) = \mathrm{Re}(h_z(u,v))$ define una métrica riemanniana en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Además $g(\mathbf{i}\, u, \mathbf{i}\, v) = g(u,v)$.
2. Una $(1,1)$-forma $\omega = -\mathrm{Im}(h)$. El tensor $\omega_z(u,v) = -\mathrm{Im}(h_z(u,v))$ es antisimétrico, por tanto es una 2-forma *real*. Es fácil ver que $g(u,v) = \omega(u, \mathbf{i}\, v)$, de donde se obtiene que ω es de tipo $(1,1)$.

De hecho, se puede comprobar que

$$\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k\,. \tag{5}$$

Definición 1.4. *Una variedad Kähler (M, ω) es una variedad compleja dotada de una métrica hermítica, cuya $(1,1)$-forma fundamental (5) satisface que $d\omega = 0$.*

Si M es una variedad Kähler de dimensión compleja n, entonces $[\omega] \in H^{1,1}(M)$. Es fácil comprobar que

$$\frac{\omega^n}{n!} = \left(\frac{\mathbf{i}}{2}\right)^n \det(h_{jk})\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n > 0$$

es una forma de volumen (de hecho, *es* el volumen riemanniano de (M, g)). Si M es compacta, tiene un volumen finito y positivo, y por tanto ha de ser

$$\int_M [\omega^n] > 0.$$

Esto implica que $[\omega]^n \neq 0$, y por tanto $[\omega] \neq 0$.

Como consecuencia, no toda variedad compleja es Kähler, dado que la condición $H^2(M) \neq 0$ es necesaria.

Ejemplo 1.5.

- El espacio proyectivo $P^n(\mathbb{C})$ es Kähler: Consideramos el abierto

$$U_0 = \{z_0 = 1\} = \{[1 : z_1 : \ldots : z_n]\} \cong \mathbb{C}^n\,;$$

en $(0,\dots,0)$ tomamos la métrica estándar, $h=\sum dz_i\, d\overline{z}_i$; usamos traslaciones $A\in U(n+1)$, $A: P^n(\mathbb{C})\to P^n(\mathbb{C})$, $[z]\mapsto[A\,z]$ para definir h en los otros puntos. Esta métrica tiene $(1,1)$-forma asociada $\omega\in\Omega^{1,1}$, que es $U(n+1)$-invariante, y la invariancia obliga a que $d\omega=0$. A esta métrica hermítica h se la denomina *métrica de Fubini-Study.*

- Una variedad proyectiva $S\subset P^N(\mathbb{C})$ es Kähler: basta tomar $h_S=h_{P^N(\mathbb{C})}\big|_S$ y $\omega_S=\omega_{P^N(\mathbb{C})}\big|_S$.

1.8. Descomposición de Hodge. Sea M una variedad compacta Kähler. Entonces se puede demostrar que hay una descomposición

$$H^k(M,\mathbb{C})=\bigoplus_{p+q=k}H^{p,q}(M).$$

En general, si M es una variedad riemanniana, tenemos un laplaciano Δ en las funciones de M. De hecho, en coordenadas ortonormales en un punto, tenemos que

$$\Delta f=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

Podemos definir también el laplaciano en el espacio de las k-formas $\Omega^k(M)$,

$$\Delta:\Omega^k(M)\to\Omega^k(M),$$

de la siguiente manera. Sea d el operador diferencial exterior y sea d^* el operador adjunto de d con respeto a la métrica inducida en $\Omega^k(M)$ por la métrica riemanniana de M, es decir, aquel que satisface

$$\langle d\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,d^*\beta\rangle\,.$$

Entonces definimos $\Delta=dd^*+d^*d$.

Una k-forma $\alpha\in\Omega^k(M)$ se llama *armónica* si $\Delta\alpha=0$. Se tiene que

$$\Delta\alpha=0\Rightarrow\langle\Delta\alpha,\alpha\rangle=0\Rightarrow\langle dd^*\alpha+d^*d\alpha,\alpha\rangle=\langle d^*\alpha,d^*\alpha\rangle+\langle d\alpha,d\alpha\rangle=0.$$

El hecho de que la métrica sea no degenerada nos permite concluir de la última igualdad que

$$d\alpha=d^*\alpha=0\,.$$

Entonces $\alpha\in\ker(d)$ y α define una clase de cohomología, $[\alpha]\in H^k(M)$. El Teorema de Hodge dice que, para cada clase de cohomología en $H^k(M)$, existe un único representante armónico:

$$H^k(M)=\ker\Delta\big|_{\Omega^k(M)}\,.$$

Si ahora M es una variedad Kähler (con métrica h), entonces el laplaciano respeta las (p,q)-formas. Esto implica que

$$H^{p,q}(M)=\ker\Delta\big|_{\Omega^{p,q}(M)}\,.$$

Como $H^k(M)=\ker\Delta\big|_{\Omega^k(M)}$ y $\Omega^k(M,\mathbb{C})=\bigoplus\Omega^{p,q}(M)$, concluimos que

$$H^k(M,\mathbb{C})=\bigoplus H^{p,q}(M)\,.$$

1.9. Variedades Kähler y variedades proyectivas. El siguiente resultado de Kodaira describe cuándo una variedad compleja es proyectiva.

Teorema 1.6 (Kodaira)**.** *Sea (M,ω) una variedad Kähler. Entonces M es proyectiva, $M\subset P^N(\mathbb{C})$, si y sólo si $[\omega]\in H^{1,1}(M)\cap H^2(M,\mathbb{Z})$.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Se tiene $H^2(P^N(\mathbb{C}),\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[H]$, donde $H\subset P^N(\mathbb{C})$ es el hiperplano del infinito. Por tanto, $H^2(P^N(\mathbb{C}))\cong\mathbb{R}$. La forma de Fubini-Study nos da el generador $[\omega_{P^N(\mathbb{C})}]\in H^2(P^N(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$. Entonces

$$[\omega]=[\omega_{P^N(\mathbb{C})}\big|_M]\in H^2(M,\mathbb{Z}).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{Z})$, entonces existe un fibrado de línea complejo $L\to M$ tal que $\omega=R_\nabla$ es la curvatura de una conexión ∇ sobre L. Podemos escribir $\nabla=\partial_L+\overline{\partial}_L$. El hecho de que ω pertenezca a $\Omega^{1,1}$ implica que $\overline{\partial}_L^2=0$, o sea, que L es un fibrado holomorfo. Se tiene $\omega>0$ y esto implica que $L^{\otimes k}\to M$ tiene "muchas" secciones globales, $s_0,\ldots,s_N$. Ahora basta definir

$$\begin{array}{rcl}\phi: M & \to & P^N(\mathbb{C})\\ x & \mapsto & [s_0(x):\ldots:s_N(x)]\,.\end{array}$$

□

1.10. Representación de homología por subvariedades. Sea M una variedad diferenciable, compacta y orientada de dimensión n. Si $S\subset M$ es una subvariedad de codimensión k, entonces la clase fundamental de S construida en la sección 1.4,

$$[S]\in H_{n-k}(M,\mathbb{R})\cong H^k(M),$$

verifica que

$$[S]\in H_{n-k}(M,\mathbb{Z})\cong H^k(M,\mathbb{Z})\subset H^k(M,\mathbb{R})\,.$$

Esto se debe a que la $(n-k)$-cadena que la representa tiene coeficientes enteros.

En 1953, René Thom se planteó la siguiente pregunta:

Si $\alpha\in H^q(M,\mathbb{Z})$, ¿existe una subvariedad $S\subset M$ tal que $\alpha=PD[S]$?

La respuesta es NO en general, pues hay problemas con la torsión (hay clases de torsión que no se pueden representar por subvariedades lisas). Sin embargo, es cierto que siempre existe $m\gg 0$ tal que

$$m\,\alpha=PD[S]\,,$$

para cierta subvariedad S de M. Este resultado también lo probó R. Thom, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields en 1958.

2. La conjetura de Hodge

Pasamos ahora a enunciar la conjetura de Hodge en sus diversas versiones, y a mencionar la motivación principal de Hodge para plantearla (el Teorema de Lefschetz para clases $(1,1)$).

De forma llana, la conjetura de Hodge se plantea como el problema de representabilidad de clases de homología, llevada al mundo de la geometría compleja (por tanto, es similar en espíritu a la cuestión resuelta por Thom, mencionada en la sección 1.10).

Recomendamos el libro [5] como una amena introducción al problema.

2.1. Clases de homología puras. Sea M una variedad de Kähler compacta de dimensión compleja n y $S \subset M$ una subvariedad compleja de dimensión (compleja) $n-p$. Entonces $[S] \in H_{2n-2p}(M,\mathbb{Z})$. Por dualidad de Poincaré sabemos que $H_{2n-2p}(M,\mathbb{Z}) \cong H^{2p}(M,\mathbb{Z})$. Por otro lado, la descomposición de Hodge nos dice que

$$H^{2p}(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{i+j=2p} H^{i,j}(M).$$

Vamos a comprobar que de hecho se tiene que $[S] \in H^{p,p}(M)$. Sea $\alpha \in H^{q_1,q_2}(M)$, $q_1+q_2 = 2n-2p$ y calculemos $\langle \alpha, [S]\rangle = \int_S \alpha$. En coordenadas, tenemos

$$\begin{array}{cccc} \imath: & S & \hookrightarrow & M \\ & (w_1,\dots,w_p) & \mapsto & (z_1,\dots,z_n); \end{array}$$

con $z_j = z_j(w_1,\dots,w_p)$ holomorfas. Podemos escribir

$$\alpha = \sum f_{IJ} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_{q_1}} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_{q_2}}\,.$$

Como

$$dz_j = \sum \frac{\partial z_j}{\partial w_k} dw_k, \quad d\overline{z}_j = \sum \frac{\partial \overline{z}_j}{\partial \overline{w}_k} d\overline{w}_k\,, \tag{6}$$

tenemos que

$$\alpha\big|_S = \sum f_{IJ}(w) J(F) \underbrace{dw_a \wedge \ldots}_{q_1} \wedge \underbrace{d\overline{w}_a \wedge \ldots}_{q_2} \tag{7}$$

donde $J(F)$ es el jacobiano de (6). Se tiene entonces que:

- si $q_1 > n-p$, $\alpha\big|_S = 0$, pues habría más de $n-p$ diferenciales del tipo dw_a, lo que forzaría a que (7) se anule;
- si $q_2 > n-p$, $\alpha\big|_S = 0$, pues habría más de $n-p$ diferenciales del tipo $d\overline{w}_a$.

Luego $\langle \alpha, [S]\rangle \neq 0$ sólo para $(q_1,q_2) = (n-p,n-p)$. Por tanto,

$$[S] \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M,\mathbb{Z}).$$

2.2. La conjetura de Hodge. Un *ciclo complejo* en M es una expresión (finita) formal

$$\sum n_i S_i$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y $S_i \subset M$ son subvariedades complejas que pueden tener singularidades. Llamamos ciclo efectivo a un ciclo $\sum n_i S_i$ con todos los $n_i \geq 0$. Por tanto, todo ciclo se puede escribir

$$T = \sum n_i S_i - \sum n_j S_j = T_1 - T_2\,,$$

donde T_1, T_2 son dos ciclos efectivos (con $n_i, n_j \geq 0$).

Podemos enunciar ahora la:

> **Conjetura de Hodge HC**(p, M). *Sea M una variedad compacta y proyectiva y sea $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$. Entonces existe $m \gg 0$ tal que*
>
> $$m\,\alpha = \sum n_i [S_i],$$
>
> *con $\sum n_i S_i$ un ciclo complejo.*

William Vallance Douglas Hodge (1903-1975).

Observaciones 2.1. Hacemos dos observaciones:

- podemos tomar $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$ y pedir que sea $\alpha = \sum r_i [S_i]$ para $r_i \in \mathbb{Q}$;
- definimos las *clases de Hodge* como

$$\mathrm{Hod}_k(M) = H^{k,k}(M) \cap H^{2k}(M, \mathbb{Q})$$

y sea

$$C_k(M) = \left\{ \sum r_i \, S_i \right\}$$

el conjunto de los ciclos complejos de codimensión k (con coeficientes racionales). La conjetura de Hodge se puede reformular diciendo que la aplicación

$$C_k(M) \to \mathrm{Hod}_k(M)$$

es sobreyectiva.

Existen otras versiones de la conjetura de Hodge, que mencionamos a continuación:

1. Si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica. Esto es falso: Atiyah y Hirzebruch, en 1962, probaron la existencia de clases de torsión, todas ellas de Hodge, que no son algebraicas (ver [1]).
2. Si $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$ no de torsión, entonces α es algebraica. Esto también es falso: Kollár, en 1996, encontró clases α no de torsión con α no algebraico y $m\,\alpha$ algebraico para $m \gg 0$.
3. La conjetura también es falsa para M compacta Kähler en lugar de proyectiva. Existen contraejemplos de Zucker (1977) y Voisin (2002) (ver [10] y [8]).

2.3. Motivación de Hodge. La motivación principal de la conjetura de Hodge proviene del siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Probado por Lefschetz para clases $(1,1)$)**.** *Sea M una variedad proyectiva. Si $\alpha \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$, entonces α es algebraica.*

Para demostrar el teorema necesitamos recordar algunos conceptos importantes:

Solomon Lefschetz (1884-1972).

Fibrados holomorfos. Sea M una variedad compleja y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recubrimiento por abiertos de M. Un fibrado de línea holomorfo sobre M es un espacio topológico L con una proyección $\pi : L \to M$ tal que, localmente,

$$L\big|_{U_\alpha} = U_\alpha \times \mathbb{C}, \ \pi : U_\alpha \times \mathbb{C} \to U_\alpha .$$

Además, para cada $\alpha, \beta \in A$ existen *funciones de transición* holomorfas

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$$

que dan aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} L\big|_{U_\alpha} & \to & L\big|_{U_\beta} \\ (x, \lambda) & \mapsto & (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot \lambda) \end{array}$$

Las funciones de transición $\{g_{\alpha\beta}\}$ satisfacen la condición de 1-cociclo:

$$g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}. \tag{8}$$

Indicamos con $\mathcal{O}$ las funciones holomorfas sobre M y con $\mathcal{O}^*$ las funciones holomorfas no nulas. La condición de cociclo (8) implica que $g = [g_{\alpha\beta}] \in H^1(M, \mathcal{O}^*)$. Por tanto, hemos probado que el espacio

$$\mathrm{Jac}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$$

parametriza los fibrados de línea holomorfos sobre M.

Sucesión exponencial. La *sucesión exponencial*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z} & \to & \mathcal{O} & \to & \mathcal{O}^* & \to & 0 \\ & & & & f & \mapsto & e^f & & \end{array}$$

es una sucesión exacta de haces. Por tanto induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\begin{tikzcd} H^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^1(M,\mathcal{O}) \arrow[r] & H^1(M,\mathcal{O}^*) \arrow[dll, "\delta"'] \\ H^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(M,\mathcal{O}) = H^{0,2}(M) & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, la descomposición de Hodge nos dice

$$H^2(M, \mathbb{C}) = H^{2,0}(M) \oplus H^{1,1}(M) \oplus H^{0,2}(M) .$$

Si $\alpha \in H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$, entonces la imagen de α en $H^2(M, \mathcal{O})$ es 0 y la exactitud de la sucesión implica $\alpha = \delta(e)$ para algún

$$e \in H^1(M, \mathcal{O}^*) = \mathrm{Jac}(M).$$

Luego e determina un fibrado de línea holomorfo $L \to M$. De hecho $\alpha = c_1(L)$ es la primera clase de Chern de L.

Observamos lo siguiente:

$$H^1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_1}, \ H^1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{b_1}, \ H^1(M, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M) ,$$

donde $b_1 = \dim H^1(M)$ se conoce como primer *número de Betti* de M. Por tanto, $H^{1,0}(M) = \mathbb{C}^{b_1/2}$, y de la sucesión exponencial deducimos

$$\begin{tikzcd} H^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(M,\mathcal{O}) = H^{0,1}(M) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{Z}^{b_1} \arrow[r] & \mathbb{C}^{b_1/2} \cong \mathbb{R}^{b_1} \end{tikzcd}$$

Se tiene que

$$\mathrm{Jac}^\alpha(M) = \delta^{-1}(\alpha) \cong \frac{H^1(M,\mathcal{O})}{H^1(M,\mathbb{Z})} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{b_1} \ ,$$

para cualquier $\alpha \in H^2(M,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$, es un toro complejo.

Con estas herramientas a nuestra disposición, ya podemos demostrar el teorema.

Demostración. Si M es proyectiva, los argumentos que vimos anteriormente nos dan la existencia de un fibrado de línea $L \to M$, holomorfo, sobre M con $c_1(L) = \alpha$.

Sea s una sección meromorfa de L y consideramos el divisor

$$D = \mathrm{Div}(s) = (s)_0 - (s)_\infty \, .$$

Se cumple que $[D] = c_1(L) = \alpha$ y el resultado queda probado. □

Hacemos unas observaciones sobre el contenido del teorema:

- el teorema es cierto para clases *enteras* de tipo $(1,1)$;
- el teorema no es cierto para M variedad Kähler;
- la demostración original de Lefschetz usaba inducción en la dimensión y un tipo especial de fibraciones conocidas hoy en día como *fibraciones de Lefschetz*.

2.4. Estructuras de Hodge. Introducimos la noción de *estructura de Hodge* de peso $k \in \mathbb{Z}$, que consiste en un triple $(V_\mathbb{Z}, V_\mathbb{R}, V_\mathbb{C})$, con

$$V_\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^r, \quad V_\mathbb{R} = V_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^r \quad \text{y} \quad V_\mathbb{C} = V_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^r$$

satisfaciendo que hay una descomposición

$$V_\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q} \tag{9}$$

con

$$\overline{V^{p,q}} = V^{q,p} \, . \tag{10}$$

La conjugación en $V_\mathbb{C}$ se define gracias a su estructura real, dada por $V_\mathbb{R} \subset V_\mathbb{C}$.

La *filtración de Hodge* está dada por

$$F^p = \bigoplus_{p'+q'=k,\ p' \geq p} V^{p',q'} .$$

Se tiene, de forma simétrica, que

$$\overline{F^q} = \bigoplus_{p'+q'=k,\ q'\geq q} V^{p',q'}.$$

Por tanto $F^p \cap \overline{F^q} = V^{p,q}$ y $F^{p+1} \cap \overline{F^q} = 0$, para $p+q=k$. La filtración F^p nos recupera la descomposición de Hodge (9).

Observaciones 2.3. Tenemos algunos detalles:

- Llamamos números de Hodge a las dimensiones $h^{p,q} = \dim V^{p,q}$. La propiedad (10) implica que $h^{p,q} = h^{q,p}$.
- Si V es una estructura de Hodge y k es impar, entonces la dimensión de V es par. Esto se debe a que

$$\dim V = \sum h^{p,q} = \sum_{p<q} (h^{p,q} + h^{q,p}) = \sum_{p<q} 2h^{p,q}.$$

- Para una variedad compacta Kähler M, la cohomología $H^k(M,\mathbb{Z})$ es una estructura de Hodge de peso k. En este caso, el k-ésimo número de Betti es

$$b_k(M) = \dim H^k(M) = \sum \dim H^{p,q}(M) = \sum h^{p,q}(M).$$

- Tenemos las dos inclusiones siguientes:

$$\begin{tikzcd} H^k(M,\mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & H^k(M,\mathbb{C}) \\ & H^{p,q}(M) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Esto nos lleva a a un problema de tipo aritmético, consistente en estudiar la intersección del subespacio complejo $H^{p,q}(M)$ con el retículo $H^k(M,\mathbb{Z})$.

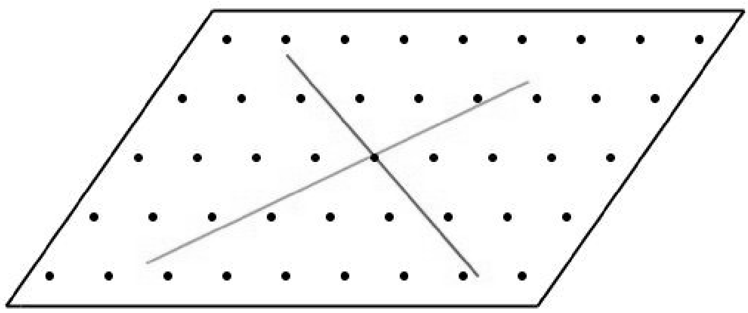


FIGURA 5. Un retículo y su intersección con subespacios de un espacio vectorial.

2.5. Conjetura original de Hodge. En esta sección describimos la conjetura tal y como la enunció Hodge en [4]. Hodge propuso la conjetura de hecho como un problema, en la conferencia que impartió en el Primer Congreso Internacional de Matemáticos, el ICM de 1950, que tuvo lugar en Harvard y en el MIT (Massachussets, EEUU).

La cita original es la siguiente:

> *It is clearly a matter of great importance to extend Lefschetz's condition for a 2-cycle to be algebraic. The general problem is as follows. It follows from the general topological properties of an algebraic variety, described above, that a p-cycle on V_m is always homologous to a cycle lying in an algebraic subvariety U_q of V_m where $q \leq p$. If it is homologous to a cycle lying in some subvariety U_{p-k}, we say that it is of rank k. Clearly $k \leq [p/2]$. If p is even and $k = p/2$, the cycle is homologous to some U_k, that is, it is algebraic. A necessary condition that a p-cycle Γ_p be of rank k is*
>
> $$\int_{\Gamma_p} A^{(p-h,h)} = 0,$$
>
> *for every exact p-form which can be written in the form*
>
> $$A^{(p-h,h)} = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-h}=1 \\ \beta_1,\ldots,\beta_h=1}}^{m} A_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-h}\beta_1\ldots\beta_h} dz^{\alpha_1}\cdots dz^{\alpha_{p-h}} d\overline{z}^{\beta_1}\cdots d\overline{z}^{\beta_h},$$
>
> *which is finite everywhere on V_m, and for which $h < k$. Lefschetz's theorem tells us that this condition is sufficient for the case $m = p = 2$, and another of his results shows that it is sufficient for the case $p = 2m - 2$, any m. Subsequently, I was able to show that if the condition is satisfied for $p = 2$, any m, there exists a non-zero integer λ such that $\lambda\,\Gamma_2$ is algebraic, and recently I have proved the sufficiency of the condition in the case $m = p = 3$ when the hyperplane sections of V_3 have geometric genus equal to zero. Beyond this, the problem is an unsolved one; I believe, however, that if we can solve it for the case $p = m$ (any m) and $k = 1$, a general solution may be deduced*[1].

[1] Es claramente un asunto de gran importancia el extender la condición de Lefschetz de que un 2-ciclo sea algebraico. El problema general es el siguiente. Se sigue de propiedades topológicas generales de una variedad algebraica, descritas arriba, que un p-ciclo en V_m es siempre homólogo a un ciclo dentro de una subvariedad algebraica U_q de V_m donde $q \leq p$. Si es homólogo a un ciclo dentro de una subvariedad U_{p-k}, decimos que tiene rango k. Claramente $k \leq [p/2]$. Si p es par y $k = p/2$, el ciclo es homólogo a algún U_k, esto es, es algebraico. Una condición necesaria para que un p-ciclo Γ_p sea de rango k es [...] para cada p-forma exacta que pueda ser escrita en la forma [...], que es finita sobre V_m y para la que $h < k$. El Teorema de Lefschetz nos dice que esta condición es suficiente para el caso $m = p = 2$, y otro de sus resultados muestra que es suficiente para el caso $p = 2m - 2$, cualquier m. Posteriormente, yo pude probar que si la condición se satisface para $p = 2$, cualquier m, entonces existe un entero no nulo λ tal que $\lambda\,\Gamma_2$ es algebraico, y recientemente he probado la suficiencia de la condición en el caso $m = p = 3$ cuando las secciones hiperplanas de V_3 tienen género geométrico igual a cero. Aparte de esto, el

(Aquí se denota como V_m una variedad V de dimensión m.)

La conjetura que hemos enunciado, $HC(p, M)$, es en realidad solamente el caso $k = p/2$ al que se refiere Hodge. El enunciado que hemos citado, pide de hecho demostrar un resultado que lo engloba.

Vamos a traducir el problema planteado por Hodge a un lenguaje más actual. Sea M una variedad proyectiva. Introducimos la *filtración aritmética* de M de la siguiente guisa. Fijamos un entero positivo c y consideramos la inclusión $S^{n-c} \hookrightarrow M^n$ de una subvariedad compleja S de codimensión (compleja) c en M. Se tiene que

$$H^{k-2c}(S) \cong H_{2n-k}(S) \xrightarrow{i_*} H_{2n-k}(M) \cong H^k(M)\,,$$

donde los isomorfismos vienen dados por la dualidad de Poincaré: el primero en S y el segundo en M. La imagen de i_* está contenida entonces en

$$H^{k-c,c}(M) \oplus \ldots \oplus H^{c,k-c}(M)\,.$$

Llamamos *filtración aritmética* de $H^k(M)$ a la imagen en $H^k(M)$ de todas las clases asociadas a *todas* las subvariedades S, y la denotamos por

$$F_a^c H^k(M) = \bigcup_{\substack{S\subset M\\ \operatorname{codim} S = c}} \operatorname{Im}\left(i_* : H^{k-2c}(S) \to H^k(M)\right).$$

Observamos que $F_a^c H^k(M)$ es una estructura de Hodge de peso k.

Llamamos *filtración homológica* a la filtración dada por

$$F_h^c H^k(M) = H^k(M, \mathbb{Z}) \cap (H^{k-c,c}(M) \oplus \ldots \oplus H^{c,k-c}(M)).$$

Con esta terminología, la pregunta original de Hodge se puede transcribir como sigue:

> **Conjetura de Hodge generalizada GHC**(c, k, M). *Para M variedad proyectiva, se tiene que*

$$F_a^c H^k(M) = F_h^c H^k(M). \tag{11}$$

En el enunciado propuesto por Hodge, se pide demostrar la igualdad sobre $\mathbb{Z}$. Pero, como ya hemos indicado, la conjetura sólo es plausible sobre $\mathbb{Q}$, y no sobre $\mathbb{Z}$. Por tanto, hoy en día se entiende que hay que tensorizar ambos miembros de la igualdad (11) por $\mathbb{Q}$.

Para $k = 2c$ se tiene que

$$\mathrm{GHC}(c, 2c, M) = \mathrm{HC}(c, M)\,,$$

y recuperamos la versión inicial de la conjetura.

Observación 2.4. Como el mismo Hodge dice, él apoya su conjetura en el hecho de que es cierta para el caso $p = 2$ (que se corresponde con el resultado del Teorema 2.2). Básicamente no había más resultados que sustentaran la conjetura.

---

problema está sin resolver. Creo, sin embargo, que si uno lo puede resolver para el caso $p = m$ (cualquier m) y $k = 1$, entonces la solución general puede ser deducida.

2.6. Grothendieck y la GHC. Grothendieck probó que la GHC es falsa en los términos en los que está formulada (incluso entendida sobre $\mathbb{Q}$), simplemente porque el miembro de la derecha de la igualdad buscada (11) puede no ser una estructura de Hodge.

Veamos a continuación el contraejemplo explícito de la GHC encontrado por Grothendieck [3]. Vamos a construir una variedad M tal que $F_a^1 H^3(M) \neq A$ con

$$A = F_h^1 H^3(M) = H^3(M,\mathbb{Q}) \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)).$$

Recordemos que, siendo $k = 3$ impar, $F_a^1 H^3(M)$ debe tener dimensión par. Vamos a construir un ejemplo en el que A tiene dimensión impar.

Consideramos la curva elíptica

$$C = \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle, \quad \tau^3 = 2 \in \mathbb{Q},$$

y sea $M = C \times C \times C$, con coordenadas z_1, z_2 y z_3.

La condición $\alpha \in A$ se reescribe como

$$\begin{aligned} &\langle \alpha, dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3\rangle = 0\,, \\ &\langle \alpha, \gamma_{ijk}\rangle \in \mathbb{Q}, \quad \forall \gamma_{ijk} \in H_3(M,\mathbb{Z})\,. \end{aligned}$$

En la primera línea, entendemos el producto de formas y, en la segunda, aparece la evaluación de α con una base de tres ciclos γ_{ijk}.

Por la fórmula de Künneth,

$$\begin{aligned} H^3(M,\mathbb{Z}) &\cong (H^2(C,\mathbb{Z}) \otimes H^1(C,\mathbb{Z}) \otimes H^0(C,\mathbb{Z}))^{\oplus 6} \oplus H^1(C,\mathbb{Z})^{\otimes 3} \\ &\cong H^1(C,\mathbb{Z})^{\oplus 6} \oplus H^1(C,\mathbb{Z})^{\otimes 3}\,, \end{aligned}$$

así que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(A) \equiv \dim_{\mathbb{Q}}(H^1(C,\mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M))) \pmod 2.$$

Tomamos el dual de Poincaré de una clase

$$\alpha \in A = H^1(C,\mathbb{Q})^{\otimes 3} \cap (H^{1,2}(M) \oplus H^{2,1}(M)),$$

obteniendo una clase de homología $a = PD(\alpha) \in H_1(C,\mathbb{Q})^{\otimes 3} \subset H_3(M,\mathbb{Q})$, tal que $\int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 0$. Escribimos

$$a = r_1\xi_{111} + r_2\xi_{11\tau} + r_3\xi_{1\tau 1} + r_4\xi_{\tau 11} + r_5\xi_{1\tau\tau} + r_6\xi_{\tau 1\tau} + r_7\xi_{\tau\tau 1} + r_8\xi_{\tau\tau\tau},$$

con $r_i \in \mathbb{Q}$, para $i = 1, \ldots, 8$. Aquí hemos tomado una base de símplices en $H^1(C,\mathbb{Z})^{\otimes 3}$. Por ejemplo, el símplice $\xi_{1\tau 1}$ se refiere a $[0,1] \times [0,\tau] \times [0,1] \subset C \times C \times C$, y análogamente para el resto. Integrando,

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^3} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = 1\,, \\ &\int_{[0,1]^2\times[0,\tau]} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = \tau\,, \\ &\int_{[0,1]\times[0,\tau]^2} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = \tau^2\,, \\ &\int_{[0,\tau]^3} dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = \tau^3 = 2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$0 = \int_a dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 = r_1 + (r_2 + r_3 + r_4)\tau + (r_5 + r_6 + r_7)\tau^2 + 2r_8 \,.$$

Esto produce 3 ecuaciones en 8 variables $r_1, \ldots, r_8$. El espacio de soluciones tiene dimensión 5, que es impar. Y por tanto, la dimensión de A es impar.

A la luz de esto, Grothendieck formula una nueva versión de la GHC.

Conjetura de Hodge arreglada por Grothendieck GHC'(c, k, M)**.** *Denotamos por* $\widehat{F}^c_h H^k(M)$ *la mayor estructura de Hodge que está contenida en el lado derecho de (11). Entonces*

$$F^c_a H^k(M, \mathbb{Q}) = \widehat{F}^c_h H^k(M, \mathbb{Q}).$$

3. Direcciones de trabajo sobre la conjetura de Hodge

Evidentemente, no sabemos si la conjetura de Hodge es cierta o no. Si no, ¡nos habríamos ganado ya un millón de dólares! Aquí queremos dar algunas indicaciones que nos ayuden a dirigir nuestros esfuerzos.

3.1. Algunos resultados preliminares. Volvemos a la conjetura de Hodge en su primera formulación (HC). Hacemos algunas observaciones que permiten simplificar el estudio del problema:

1. Gracias al Teorema de Lefschetz sobre clases de tipo $(1,1)$, la conjetura es cierta para $p = 1$.
2. Si HC es cierta para clases (p,p) con $p \leq n/2$, entonces es cierta para clases $(n-p, n-p)$. Esto es verdad gracias a la *propiedad fuerte de Lefschetz*. Sea M una variedad Kähler y consideramos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} L : H^{p,q}(M) & \to & H^{p+1,q+1}(M) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \wedge [\omega]\,, \end{array}$$

donde ω es la clase fundamental asociada a la métrica de Kähler. Entonces, para $a, b \geq 0$, con $a, b \equiv n \pmod 2$, se tiene que

$$L^{(a+b)/2} : H^{\frac{n-a}{2}, \frac{n-b}{2}}(M) \to H^{\frac{n+b}{2}, \frac{n+a}{2}}(M) \tag{12}$$

es un isomorfismo. Observamos que L lleva clases de Hodge a clases de Hodge. Si $M \subset P^N(\mathbb{C})$, consideramos un hiperplano $H \subset P^N(\mathbb{C})$ y su clase de (co)homología $[H] \in H_{2N-2}(P^N(\mathbb{C})) = H^2(P^N(\mathbb{C}))$. Entonces $[H] = [\omega_{P^N(\mathbb{C})}]$. Puesto $\omega = \omega_{P^N(\mathbb{C})}\big|_M$, se tiene que

$$[\omega] = [H \cap M] \in H^2(M).$$

Si $S \subset M$ y $\alpha = [S] \in H^{2k}(M, \mathbb{Z})$, entonces

$$L(\alpha) = \alpha \wedge [\omega] = [S \cap H] \in H^{2k+2}(M, \mathbb{Z}),$$

luego L lleva ciclos algebraicos a ciclos algebraicos.

Ahora, sea $\beta \in H^{n-p,n-p}(M) \cap H^{2n-2p}(M, \mathbb{Q})$. Entonces $\beta = L^{n-2p}(\alpha)$ para cierta forma $\alpha \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Q})$. Si $\alpha = [S]$ es un ciclo algebraico, entonces $\beta = [S \cap H^{n-2p}]$ también lo es.

Notamos que la conjetura de Hodge implicaría que el inverso de L también lleva ciclos algebraicos a ciclos algebraicos.

3. La conjetura de Hodge es cierta en dimensión (compleja) 3. Se debe a que para $n = 3$, sabemos que la conjetura es cierta para clases de tipo $(1, 1)$ y de tipo $(2, 2)$ por el comentario anterior. Esto cubre todos los casos.
4. La conjetura de Hodge es cierta para grassmannianas, espacios proyectivos y variedades de bandera. La razón es que en estos casos los generadores de la cohomología son todos clases algebraicas.

   Si $H^{2k}(M, \mathbb{C}) = H^{k,k}(M)$ entonces todas las clases son de Hodge.
5. Para probar HC nos basta probar el caso $p = n/2$, n par.

   Supongamos que este caso es cierto, y veamos que en los demás casos HC también debería serlo. Si $p < n/2$, tomamos una sección hiperplana $Y = X \cap H$, $\dim(Y) = n - 1$. El teorema de la sección hiperplana de Lefschetz asegura que la aplicación restricción produce

$$\begin{array}{rcl} H^k(X) & \cong & H^k(Y), \quad \text{para } k < n-1, \\ H^{n-1}(X) & \hookrightarrow & H^{n-1}(Y). \end{array}$$

Asumimos HC en dimensión p para Y. Consideramos la fibración de Lefschetz

$$\overline{X} = \mathrm{Bl}_B(X) \xrightarrow{\pi} P^1(\mathbb{C}). \tag{13}$$

Recordemos que la fibración de Lefschetz se construye de la siguiente forma: tomamos dos hiperplanos genéricos H_1, H_2 e intersecamos $B = H_1 \cap H_2 \cap X$. Esta intersección es una subvariedad lisa de codimensión 2. Ahora tomamos la familia de hiperplanos que contienen a B. Esta familia $\{H_t\}$ está parametrizada por un parámetro $t \in P^1(\mathbb{C})$. Denotamos $Y_t = H_t \cap X$. La aplicación que envía los puntos de Y_t a t no está bien definida en B, pero sí que lo está tras explotar X a lo largo de B. Denotamos $\overline{X} = \mathrm{Bl}_B(X)$ la explosión de X con centro en B.

Ahora tomamos, para cada fibra Y_t, el esquema de Hilbert $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$, que parametriza ciclos algebraicos (de codimensión p) en Y_t. Hay un fibrado

$$\mathrm{Hilb}(\overline{X}/P^1(\mathbb{C})) \to P^1(\mathbb{C}),$$

con fibras $\mathrm{Hilb}^p(Y_t)$. Sea $\alpha \in H^{2p}(X)$ una clase de Hodge. Para t genérico, existe un ciclo algebraico $C \subset Y_t$ tal que $[C] = m\,\alpha\big|_Y \in H^{2p}(Y)$, $m \gg 0$. Luego $C \in \mathrm{Hilb}(\overline{X}/P^1(\mathbb{C}))$, y podemos tomar una (multi)sección de $\mathrm{Hilb}(\overline{X}/P^1(\mathbb{C}))$ pasando por C. Esto da un ciclo $\overline{C} \subset \overline{X}$ con $\dim(\overline{C}) = \dim(C) + 1$. Como

$$[\overline{C}] \in H^{2p}(X), \quad [\overline{C}]\big|_Y = [C] = m\,\alpha\big|_Y,$$

el teorema de secciones hiperplanas de Lefschetz nos da que $[\overline{C}] = m\,\alpha$. Ahora podemos deshacer el *blow-up* $\overline{X} \to X$, y conseguir el ciclo algebraico requerido.

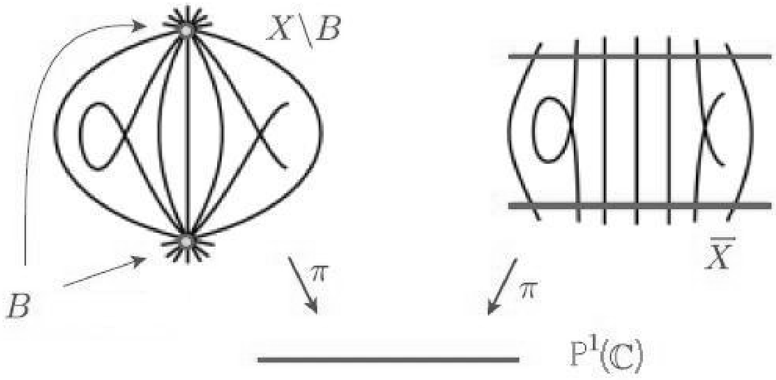


Figura 6. Pincel de Lefschetz con fibración de Lefschetz asociada. Esta imagen está tomada de [2].

6. Basta considerar *clases primitivas*. Recordemos el isomorfismo de Lefschetz (12). Las formas primitivas en $H^{\frac{n-a}{2},\frac{n-b}{2}}(M)$ son las aniquiladas por $L^{(a+b)/2+1}$. Es decir, para $p, q \le n$,
$$H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(M) = \{\alpha \in H^{p,q}(M) \mid L^{n-p-q+1}(\alpha) = 0\}.$$
Se tiene que
$$H^{p,q}(M) = H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(M) \oplus L(H^{p-1,q-1}(M))\,.$$
Es claro que los sumandos de esta descomposición son sub-estructuras de Hodge. Ahora consideremos clases de Hodge con $p = n/2$ y n par. Entonces
$$H^{p,p}(M) = H^{p,p}_{\mathrm{prim}}(M) \oplus L(H^{p-1,p-1}(M)),$$
donde las clases primitivas $\alpha \in H^{p,p}_{\mathrm{prim}}(M)$ son aquéllas que verifican que $L(\alpha) = 0$.

   Si tenemos demostrado, por los casos previos, que las clases de Hodge en $H^{p-1,p-1}(M)$ son ciclos algebraicos, entonces las clases en $L(H^{p-1,p-1}(M))$ vienen dadas por ciclos algebraicos. Esto se debe a que si $\alpha = [S] \in H^{p-1,p-1}(M)$, entonces
$$L(\alpha) = \alpha \wedge \omega = [S] \wedge [H] = [S \cap H] \in L(H^{p-1,p-1}(M))\,.$$
Por tanto, basta demostrar HC para ciclos de Hodge en $H^{p,p}_{\mathrm{prim}}(M)$.
7. En vez de buscar ciclos algebraicos, que pueden tener singularidades, nos basta con centrarnos en la búsqueda de subvariedades complejas (lisas).

   Dado un ciclo algebraico $\alpha = [S]$ de codimensión p, donde S es una subvariedad posiblemente singular, posiblemente reducible, consideramos la clase $\alpha + m[H]^p$, $m \gg 0$ (donde H^p denota la clase de una intersección genérica de p secciones hiperplanas). Un resultado de geometría algebraica conocido como *moving lemma* nos permite encontrar una subvariedad lisa S' con $\alpha + m[H]^p = [S']$. Así podemos convertir el ciclo en liso.

Supongamos que ahora tenemos

$$\alpha = \sum_{r_i>0} r_i[S_i] - \sum_{r'_j>0} r'_j[S'_j],$$

es decir, un ciclo algebraico no efectivo. Podemos encontrar hipersuperficies de grado muy alto que contengan a los S'_j. Intersecando varias de ellas, llegamos a que $\alpha + m_1[H]^p = \sum_{a_k>0} a_k[S''_k]$ es un ciclo efectivo. Ahora podemos sumar otro múltiplo de $[H]^p$ para conseguir que el ciclo sea irreducible y, de hecho, también liso. Por tanto, $\alpha = [S_1] - [S_2]$, con S_1 y S_2 subvariedades complejas irreducibles y lisas.

3.2. Variedades abelianas genéricas. Vamos a desarrollar ahora algunos ejemplos y posibles contraejemplos en relación con la HC. La variedades abelianas constituyen uno de los casos paradigmáticos.

Llamamos *toro complejo* a una variedad compleja de la forma $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$, donde $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ es un retículo, es decir

$$\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2n} = \mathbb{Z}\langle e_1, \ldots, e_{2n}\rangle$$

y los vectores $e_1, \ldots, e_{2n}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Los toros complejos son variedades compactas que admiten una estructura de grupo de Lie complejo abeliano, tomando como operación la inducida por la suma.

Escribimos $e_\ell = (a_{\ell,1}, \ldots, a_{\ell,n}) \in \mathbb{C}^n$. Llamamos matriz de periodos a

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{2n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \ldots & a_{2n,n} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Esta matriz, definida salvo multiplicación por la derecha por un elemento de $\mathrm{Gl}(2n, \mathbb{Z})$ y salvo multiplicación por la izquierda por un elemento de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$, es la que caracteriza al toro como variedad compleja.

Se tiene que

$$H^{p,q}(T) = \bigwedge\nolimits^{p,q} \mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle dz_I \wedge d\bar{z}_J \mid I = \{i_1, \ldots i_p\},\ J = \{j_1, \ldots, j_q\}\rangle.$$

Por tanto, todo toro complejo es Kähler, tomando $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, donde (h_{jk}) es una métrica hermítica cualquiera de $\mathbb{C}^n$.

Cuando el toro es una variedad proyectiva, se le denomina *variedad abeliana*. Por el Teorema 1.6, esto ocurre cuando existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T, \mathbb{Z})$ positiva. La homología entera viene dada por

$$H_k(T) = \mathbb{Z}\langle e_A \mid A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \subset (1, \ldots, 2n)\rangle,$$

donde consideramos los k-ciclos

$$e_A = \{z = t_1 e_{\alpha_1} + \ldots + t_k e_{\alpha_k} \mid 0 \le t_i \le 1\}.$$

Calculemos ($k=p+q$)

$$r_{AIJ} := \int_{e_A} dz_I \wedge d\overline{z}_J = \int_0^1 \cdots \int_0^1 (a_{\alpha_1,i_1} dt_1 + \ldots + a_{\alpha_k,i_1} dt_k) \wedge \ldots \wedge$$

$$\wedge(\overline{a}_{\alpha_1,j_q} dt_1 + \ldots + \overline{a}_{\alpha_k,j_q} dt_k)$$

(15)

$$= \det \begin{pmatrix} a_{\alpha_1,i_1} & \cdots & a_{\alpha_k,i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\alpha_1,i_p} & \cdots & a_{\alpha_k,i_p} \\ \overline{a}_{\alpha_1,j_1} & \cdots & \overline{a}_{\alpha_k,j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{\alpha_1,j_q} & \cdots & \overline{a}_{\alpha_k,j_q} \end{pmatrix}.$$

Una clase $\omega = \frac{\mathbf{i}}{2}\sum h_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k$ es entera si

$$\int_{e_A} \omega = \frac{\mathbf{i}}{2} \sum_{j,k} h_{jk} r_{Ajk} \in \mathbb{Z}\,, \tag{16}$$

para todo $A=\{\alpha_1,\alpha_2\} \subset \{1,\ldots,2n\}$. Si la matriz de periodos es muy genérica (por ejemplo, si todos sus coeficientes son algebraicamente independientes), entonces no hay solución a esta ecuación, y la variedad no es proyectiva.

Supongamos ahora que T es una variedad abeliana, es decir que existe $[\omega] \in H^{1,1}(T) \cap H^2(T,\mathbb{Z})$ positiva. Si los $(a_{\ell,i})$ son genéricos cumpliéndose (16), entonces $H^{p,p}(T) \cap H^{2p}(T,\mathbb{Z})$ es de dimensión pequeña y sólo contiene a $[\omega]^p$. La conjetura de Hodge es entonces cierta para variedades abelianas genéricas.

3.3. Grupo de Mumford-Tate. Sea V una estructura de Hodge de peso k, i.e. $V_{\mathbb{C}} = \oplus_{p+q=k} V^{p,q}$. Consideramos la representación $\mathbb{C}^* \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}})$ (por automorfismos reales) dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* \times V_{\mathbb{C}} & \to & V_{\mathbb{C}} \\ (z,v) & \mapsto & z^p\,\overline{z}^q\,v \end{array}$$

para $v \in V^{p,q}$. De hecho, esta acción recupera la descomposición, dado que los $V^{p,q}$ son los subespacios correspondientes a los distintos pesos.

Definición 3.1. *Se define el grupo de Mumford-Tate $MT(V)$ como el menor grupo G definido sobre $\mathbb{Q}$, $G_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(V_{\mathbb{C}})$ tal que $\mathbb{C}^* \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$.*

El grupo G fija todas las clases de Hodge

$$\mathrm{Hod}_p(V) = V_{\mathbb{C}}^{p,p} \cap V_{\mathbb{Q}}^{2p}$$

en V y de hecho en toda su álgebra tensorial. El grupo de Mumford-Tate es el centralizador de las clases de Hodge. Si para una variedad V somos capaces de calcular $MT(V)$ y resulta ser suficientemente grande, entonces por teoría de representaciones obtendremos que $\mathrm{Hod}_p(V)$ es pequeño.

Supongamos ahora que M es una variedad proyectiva compacta. Sus clases de Hodge son

$$\mathrm{Hod}_p(M) = H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M,\mathbb{Q}) = \mathrm{Hod}_p(H^{2p}(M)).$$

Si el grupo de Mumford-Tate de M es grande, entonces puede ocurrir que

$$\underbrace{\mathrm{Hod}_1(M) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Hod}_1(M)}_{p} \to \mathrm{Hod}_p(M)$$

sea sobreyectivo. Como todas las clases en $\mathrm{Hod}_1(M)$ se representan por ciclos algebraicos (Teorema de Lefschetz para clases $(1,1)$), tendremos que $HC(p, M)$ es cierta.

Por ejemplo, así se pueden estudiar los toros complejos, donde V es una estructura de Hodge de peso 1 y $M = V^{1,0}/V_{\mathbb{Z}}$.

3.4. Contraejemplo de Zucker. En [10], Zucker dio un contraejemplo para la conjetura de Hodge enunciada para variedades Kähler (es decir, si no suponemos que la variedad sea proyectiva).

Sean $M = \mathbb{C}^2/\Lambda$, donde consideramos la matriz de periodos

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{i}a & \mathbf{i}b \\ c & d & -\mathbf{i}c & -\mathbf{i}d \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que tomamos los 4 vectores

$$e_1 = (a, c),\ e_2 = (b, d),\ e_3 = (\mathbf{i}a, -\mathbf{i}c) \text{ y } e_4 = (\mathbf{i}b, -\mathbf{i}d)$$

como base del retículo $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$. Si

$$\theta = (a\overline{d} - b\overline{c})^{-1} dz_1 \wedge d\overline{z}_2 = \mu + \mathbf{i}\nu \in \Omega^{1,1}(M),$$

se tiene que, usando (15),

$$\int_{e_{12}} \theta = 1,\ \int_{e_{13}} \theta = 0,\ \int_{e_{14}} \theta = \mathbf{i},\ \int_{e_{23}} \theta = -\mathbf{i},\ \int_{e_{24}} \theta = 0 \text{ y } \int_{e_{34}} \theta = -1,$$

donde e_{ij} es el 2-ciclo de la forma $\{t_1 e_i + t_2 e_j \mid t_1, t_2 \in [0,1]\}$.

Por tanto,

$$\mu = [e_{12} - e_{34}], \quad \nu = [e_{14} - e_{23}] \in H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Para a, b, c, d genéricos, se tiene que

$$H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}) = \langle \mu, \nu \rangle.$$

Consideramos ahora el endomorfismo $J : M \to M$ dado por

$$(z_1, z_2) \mapsto (\mathbf{i}z_1, -\mathbf{i}z_2).$$

Nótese que J es una aplicación holomorfa. Se cumple que $J^*\theta = -\theta$ y entonces $J^* = -\mathrm{Id}$ en $\langle \mu, \nu \rangle$. Luego $J^* = -\mathrm{Id}$ en $\mathrm{Div}(M)$ y esto implica que $\mathrm{Div}(M) = 0$. La conjetura de Hodge no es por tanto cierta para M, porque sí que hay clases de Hodge pero no hay subvariedades de codimensión 1 en M.

De hecho, el Teorema de Lefschetz para clases $(1,1)$ no es cierto para variedades Kähler no proyectivas.

3.5. Toro de Weil. En [9], A. Weil propuso una variedad abeliana de dimensión 4 como posible contraejemplo a la conjetura de Hodge. Este toro posee clases de Hodge de tipo $(2,2)$ para las que aún no se sabe si se pueden encontrar ciclos complejos que las representen. Por tanto, para este toro complejo no se sabe si HC es cierta o no.

Elegimos $d \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados y sea

$$L = \mathbb{Z}[\sqrt{-d}] \subset \mathbb{C}.$$

Tomamos $V_\mathbb{Z} = L^4 \subset \mathbb{C}^4$ (éste es un retículo de rango 8). Sea $\varphi : L \to L$ el endomorfismo $x \mapsto \sqrt{-d}\,x$ y sea $\overline{\varphi} = \frac{\varphi}{\sqrt{d}} : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$. Se tiene que $V_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^8$ y $\overline{\varphi}^2 = -\mathrm{Id}$ de manera que

$$(V_\mathbb{R}, \overline{\varphi})$$

es un espacio complejo, isomorfo por tanto a $(\mathbb{C}^4, \mathbf{i})$. Consideramos una descomposición en dos subespacios $\overline{\varphi}$-complejos de dimensión 2, $V_\mathbb{R} = W_+ \oplus W_-$, y definimos

$$J\big|_{W_+} = \overline{\varphi} \quad \text{y} \quad J\big|_{W_-} = -\overline{\varphi},$$

de manera que $J^2 = -\mathrm{Id}$. Entonces $(V_\mathbb{R}, J)$ es un espacio vectorial complejo. Ahora consideramos el toro

$$T = (V_\mathbb{R}, J)/V_\mathbb{Z}.$$

Claramente, $\varphi J = J\varphi$ y $\varphi(V_\mathbb{Z}) \subset V_\mathbb{Z}$. Por tanto, φ da un endomorfismo de T. Se tiene que

$$\mathrm{End}(T) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-d}],$$

donde el isomorfismo viene dado por $\varphi \mapsto \sqrt{-d}$ (se dice que el toro complejo tiene *multiplicación compleja*).

Tenemos que

$$H^i(T,\mathbb{Z}) = \bigwedge^i V_\mathbb{Z} \quad \text{y} \quad H^{p,q}(T) = \bigwedge\nolimits_J^p V \otimes \overline{\bigwedge\nolimits_J^q V}.$$

También

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \cong \bigwedge\nolimits_L^4 V_\mathbb{Z} \subset \bigwedge^4 V_\mathbb{Z} = H^4(T,\mathbb{Z}),$$

donde interpretamos que las 4-formas L-multilineales son en particular $\mathbb{Z}$-multilineales. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits_L^4 V_\mathbb{Z} \subset \bigwedge\nolimits_\varphi^4 V_\mathbb{R} \subset \bigwedge\nolimits_\varphi^4 (W_+ \oplus W_-) &= \bigwedge\nolimits_\varphi^2 W_+ \otimes \bigwedge\nolimits_\varphi^2 W_- = \\ &= \bigwedge\nolimits_J^2 W_+ \otimes \overline{\bigwedge\nolimits_J^2 W_-} \subset \bigwedge\nolimits_J^{2,2} V = H^{2,2}(T), \end{aligned}$$

luego

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-d}] = L \subset H^4(T,\mathbb{Z}) \cap H^{2,2}(T).$$

Éstas son las conocidas como *clases de Weil*. Weil conjeturó que no todas ellas son algebraicas (lo que supondría un contraejemplo a HC).

No obstante, existen valores de d específicos para los que se sabe que HC es cierta para el correspondiente toro de Weil, lo que hace aún más misterioso el problema. Véanse los resultado de Schoen [7] al respecto.

3.6. ¿La conjetura de Hodge es cierta o falsa? Podemos enmarcar en 3 grandes líneas los trabajos que versan sobre la conjetura de Hodge.

1. **Ejemplos.** Se buscan ejemplos de variedades algebraicas para las que se pueda probar la conjetura de Hodge. En general, la HC se prueba por métodos algebraicos, calculando cuáles son los ciclos de Hodge y probando que todos ellos se pueden realizar por subvariedades algebraicas.
   - Variedades algebraicas con mucha cohomología algebraica (grassmannianas, $P^n(\mathbb{C})$, variedades de bandera, etc.).
   - Variedades con pocas clases de Hodge (calculando el grupo de Tate-Mumford).
   - Hipersuperficies e intersecciones completas del espacio proyectivo (hay sólo resultados en algunos casos).
   - Variedades unirregladas, racionales, racionalmente conexas, ... (se intenta probar $\mathrm{GHC}(1, n, X)$).
   - Algunas variedades abelianas (toros complejos) y jacobianas (caso genérico, etc.).
   - Usando K-teoría. Arapura-Kang han construido un funtor

     $$\lambda : K_0(\mathrm{Var}) \to \mathcal{A}$$

     que va del anillo de Grothendieck de clases de variedades, en cierto grupo abeliano, y que nos dice si una variedad satisface HC.
2. **Construcciones de ciclos algebraicos y resultados generales**. Se pretende probar la conjetura de Hodge de forma general construyendo un ciclo algebraico para cada clase de Hodge.
   - Reducción a casos básicos, para simplificar el problema lo más posible (clases primitivas, etc.).
   - Teoría de funciones normales (Griffiths-Green), uso de fibraciones de Lefschetz y Jacobianas intermedias. Ésta es una técnica muy explorada que intenta generalizar la solución al Teorema de Lefschetz para clases $(1, 1)$ usando fibraciones de Lefschetz. Pero no ha dado resultado por ahora.
   - Generalización de HC para variedades singulares y abiertas. Permite estudiar la conjetura en un marco más general.
   - Teoría de motivos (Grothendieck), conjeturas de Tate, conjeturas estándar, estudio del grupo de Mumford-Tate. Dan un acercamiento a HC desde el punto de vista de la geometría aritmética. Sólo han dado resultados parciales a efectos de la HC, pero sin embargo han servido para profundizar en el entendimiento de problemas de geometría algebraica y aritmética.
   - Corrientes laminares (Sullivan). Se propone construir ciclos algebraicos por medio del estudio de corrientes con una estructura "compleja" asociados a formas de tipo (p, p).
3. **Búsqueda de contraejemplos**. Si asumimos que la HC puede ser falsa, el camino natural es construir un contraejemplo. Aquí la dificultad radica

en demostrar que una determinada clase de tipo (p,p) no es representable por subvariedades algebraicas.

- Contraejemplo de Zucker para el caso Kähler (Zucker, Voisin). Las buenas noticias son que en el caso de variedades Kähler no proyectivas, hay un contraejemplo a HC (con toros complejos). Por otro lado, la condición de ser proyectiva no parece dar indicación de hacer más plausible HC.
- Expectaciones de la *mirror symmetry*. La mirror symmetry da una correspondencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades complejas} \\ \text{haces coherentes} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades simplécticas} \\ \text{subvariedades lagrangianas} \end{array} \right\}$$

  Aunque esta correspondencia es en gran medida conjetural, hay gran evidencia de que puede ser cierta. Por otro lado, el lado simpléctico da indicaciones de que se pueden construir contraejemplos a HC.
- Toros de Weil. André Weil construyó una variedad abeliana de dimensión 4 con una clase de Hodge de tipo $(2,2)$ para la que propuso demostrar que HC no se satisface. Es aún un problema abierto.
- Instantones $Spin(7)$ en 8-variedades Calabi-Yau. Un análisis con teorías gauge permite entender el problema (en el caso de dimensión compleja 4) desde un punto de vista analítico, por medio de una correspondencia del estilo Hitchin-Kobayashi. En esta situación, la condición de ser proyectiva no parece aportar información, y esperaríamos que la HC fuera falsa.

Alexander Grothendieck (1928-).

3.7. Comentario final. Para probar una conjetura, lo primero que uno necesita es hacerse una idea de lo plausible que es. Las esperanzas de los distintos matemáticos dependen mucho de su visión personal. Por ejemplo, vemos que los comentarios de Alexandre Grothendieck y de André Weil son realmente contrapuestos.

En su artículo [3], Grothendieck dice lo siguiente

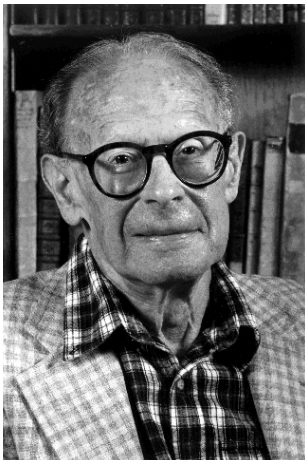
> *This conjecture is plausible enough, and (as long as it is not disproved!) should certainly be regarded as the deepest conjecture in the "analytic" theory of algebraic varieties.*[2]

Ciertamente la visión de Grothendieck (muy positiva en relación con esta cuestión) está influenciada por su visión algebraica de los problemas de geometría compleja.

En cambio, Weil contrapone la siguiente consideración

> *La question que pose la "conjecture de Hodge" est bien naturelle... Par malheur, en dépit du mot de "conjecture", il n'y a, que je sache, pas l'ombre d'une raison d'y croire; on rendrait service aux géomètres si l'on pouvait trancher la question au moyen d'un contre-exemple.*[3]

De hecho, Weil considera que se pone con mucha alegría el apelativo de conjetura a lo que son en realidad sólo preguntas en matemáticas, y expone que en este caso particular no hay razón (aparte de unos pocos ejemplos en los que se satisface) para creer que la HC es cierta.



André Weil (1906-1998).

[2]La conjetura (de Hodge) es suficientemente plausible y (¡mientras no sea refutada!) debe considerarse la conjetura más profunda en la teoría analítica de variedades algebraicas.

[3]La pregunta que plantea la conjetura de Hodge es muy natural... Sin embargo, a pesar del apelativo de conjetura, no hay que yo sepa ninguna sombra de razón de creer en ella; se haría un favor a los geómetras si se pudiera zanjar la cuestión por medio de un contraejemplo.

Referencias

[1] M. F. Atiyah y F. Hirzebruch, Analytic cycles on complex manifolds, *Topology* **1** (1962), 25–45.
[2] R. Gompf, What is a Lefschetz Pencil?, *Notices of the Amer. Math. Soc.* **52** (2005), 848–850.
[3] A. Grothendieck, Hodge's General Conjecture is False for Trivial Reasons, *Topology* **8** (1969), 299–303.
[4] W. V. D. Hodge, The topological invariants of algebraic varieties, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, MA*, vol. 1, 1950, pp. 181–192.
[5] J. D. Lewis, *A survey of the Hodge conjecture*, CRM monogarph, AMS (1999).
[6] J. H. Poincaré, Analysis Situs, *Journal de l'École Polytechnique, ser. 2* **1** (1895), 1–123.
[7] C. Schoen, Hodge classes on self-products of a variety with an automorphism, *Compositio Math.* **65** (1988), 3–32.
[8] C. Voisin, A Counterexample to the Hodge Conjecture Extended to Kähler Varieties, *Int. Math. Res. Not.* **20** (2002), 1057–1075.
[9] A. Weil, Abelian Varieties and the Hodge ring, *Collected Papers*, Volume III, Springer-Verlag, New York, 1980, pp. 421–429.
[10] S. Zucker, The Hodge Conjecture for Cubic Fourfolds, *Compositio Math.* **34** (1977), 199–209.
[11] Millennium Prize Problems, `http://www.claymath.org/millennium/`

Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid

Correo electrónico: `vicente.munoz@mat.ucm.es`
URL: `http://www.mat.ucm.es/~vmunozve`